Alfaomega Grupo Editor

Conjuntos Infinitos

Ramón Espinoza Armenta

Apoyo en la web

AVC Apoyo Virtual para el Conocimiento

El estudio de los conjuntos infinitos se inicia con *Las Paradojas del Infinito*, la última obra del matemático checo Bernard Bolzano, publicada en 1851, tres años después de su muerte. Posteriormente el matemático ruso Georg Cantor clarificó la noción de conjunto infinito y mostró que podían existir conjuntos infinitos de distinto tamaño.

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Se dice que A tiene la misma **cardinalidad** que B, si existe una función biyectiva de A en B. En este caso escribimos $A \sim B$.

Teorema 1. *Sean A B y C conjuntos no vacíos. Entonces*
a) $A \sim A$;
b) *si* $A \sim B$, *entonces* $B \sim A$;
c) *si* $A \sim B$ *y* $B \sim C$, *entonces* $A \sim C$.

Demostración.

a) Se sigue del hecho de que la función identidad 1_A es biyectiva.

b) Si $A \sim B$, entonces existe una función biyectiva $f : A \to B$, por lo tanto, la función inversa
$f^{-1} : B \to A$ es una función biyectiva de B en A, y por lo tanto $B \sim A$.

c) Si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces existe una función biyectiva $f : A \to B$ y existe una función
biyectiva $g : B \to C$. Por lo tanto la composición $h = g \circ f$ es una función biyectiva de A en
C, y de ahí que $A \sim C$.

Observa que un conjunto A es finito, si es vacío o si existe un número natural n, tal que
$\{1, 2, \ldots, n\} \sim A$. Si un conjunto no es finito, se dice que es **infinito**.

Ejemplo 1. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito. Para probar esta afirmación supongamos que existe un número natural n, y una función biyectiva $f : \{1, 2, \ldots, n\} :\to \mathbb{N}$. Sea
$a = \text{máx}\{f(1), f(2), \ldots, f(n)\} + 1$.

Por lo tanto $a \in \mathbb{N}$, sin embargo, $f(k) \neq a$, para toda $k \in \{1; 2, \ldots, n\}$, lo cual contradice la suposición de que f es biyectiva.
Un conjunto infinito puede tener la misma cardinalidad que un subconjunto propio de él mismo, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. El conjunto $A = \{2, 4, 6, \ldots,\}$ tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, pues la función $f : \mathbb{N} \to A$, definida por $f(n)=2n$, es claramente biyectiva.
El siguiente ejemplo muestra que el conjunto de los números enteros tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números naturales.

Ejemplo 3. Sea $f : \mathbb{N} \to Z$ definida por:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si} \quad n \quad es \quad par; \\ (1-n)/2 & \text{si} \quad n \quad es \quad impar. \end{cases}$$

Observa que $f(n) > 0$ si n es par y $f(n) \leq 0$ si n es impar, por lo que $f(n)= f(m)$ implica que n y m son ambos pares o ambos impares. Si $f(n)= f(m)$ y n, m son ambos pares, entonces

$$\frac{n}{2} = \frac{m}{2}$$

y de ahí que $n = m$. Por otra parte, si $f(n) = f(m)$ y n, m son ambos impares, entonces

$$\frac{1-n}{2} = \frac{1-m}{2}$$

por lo que también $n = m$, con lo cual concluimos que f es inyectiva.
Para ver que f es suprayectiva, sea $m \in \mathbb{Z}$ arbitrario. Si $m > 0$, entonces $2m \in \mathbb{N}$ y $f(2m)= m$. Por otra parte, si $m \leq 0$, entonces $1-2m \in \mathbb{N}$ y $f(1 - 2m)= m$. Por lo tanto f es suprayectiva. Como f es inyectiva y suprayectiva concluimos que f es biyectiva.

Un conjunto A se dice que es **numerable**, si $A \sim \mathbb{N}$. El conjunto de los números naturales es numerable. Otros conjuntos numerables son el conjunto de enteros positivos pares y el conjunto de los números enteros. Un conjunto se dice que es **a lo más numerable**, si es finito o numerable. El siguiente resultado establece que todo subconjunto de los números naturales es a lo más numerable.

Teorema 2. *Si* $A \subseteq \mathbb{N}$, *entonces A es a lo más numerable.*

Demostración.

Si A es finito, entonces no hay nada que probar. Supongamos ahora que A es infinito. Por el principio del buen orden, A tiene un elemento mínimo. Denotemos $f(1)$ a ese elemento. Por hipótesis el conjunto $A - \{f(1)\}$ es no vacío, de modo que también tiene un elemento mínimo, el cual denotaremos $f(2)$. En general, sea

$$f(n) = mín(A - \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Se puede demostrar por inducción que

$$n \leq f(n) < f(n+1),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto f es inyectiva.

Para probar que f es suprayectiva, sea $a \in A$, y consideremos el conjunto

$$\{f(k) | a \leq f(k)\}.$$

Observa que este conjunto es no vacío, pues $a \leq f(a)$. Sea $m \in \mathbb{N}$, tal que $f(m)$ sea el mínimo de este conjunto. Por lo tanto $f(m-1) < a \leq f(m)$. Como a $\in \{f(1), f(2), \ldots, f(m-1)\}$, se sigue que $f(m) \leq a$, y de ahí que $f(m) = a$. Por lo tanto f es suprayectiva.

En conclusión, f es una función biyectiva de $\mathbb{N}$ en A, por lo tanto A es numerable.

Corolario 1. *Si B es un conjunto no vacío, y existe una función inyectiva $f : B \to \mathbb{N}$, entonces B es a lo más numerable.*

Demostración.

Como $f(B) \subseteq N$, se sigue del teorema anterior que $f(B)$ es a lo más numerable. Como además f es inyectiva, tenemos que $B \sim f(B)$, y por lo tanto B es a lo más numerable.

Corolario 2. *Si A es numerable y $B \subseteq A$, entonces B es a lo más numerable.*

Demostración. Si B es vacío no hay nada que probar. En otro caso sea $g : B \to A$, definida por $g(b)= b$. Como A es numerable, existe una función biyectiva $f : A \to \mathbb{N}$. Por lo tanto la composición $h = f \circ g$ es una función biyectiva de B en $\mathbb{N}$, de ahí que, por el corolario anterior, B es a lo más numerable.

Ejemplo 4. Mostrar que el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Solución. Consideremos la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n, m)=2^n 3^m$.

Si $f(n, m)= f(p, q)$, entonces $2^n 3^m = 2^p 3^q$, de ahí que, por el teorema fundamental de la aritmética, $n = p$ y $m = q$, por lo tanto $(n, m)=(p, q)$, es decir, f es inyectiva. Por lo tanto, por el corolario 1, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Teorema 3. *El conjunto de los números racionales es numerable*.

Demostración.

Cada número racional se puede expresar de manera única como m/n, donde $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ y $mcd(m, n) = 1$. Suponiendo que cada número racional está expresado de esta manera, definamos $h: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, por $h(m/n)=(m, n)$. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, existe una función biyectiva

$f: □ \to □$. Por lo tanto la función g: $□ \times □ \to □ \times □$, definida por $g(n, m)=(f(n),m)$ es biyectiva. De ahí que la composición $g \circ h$ es una función inyectiva de □ en $□ \times □$. Como $□ \times □$ es numerable, se sigue que □ es numerable.

A fines del siglo XIX, Cantor demostró que el conjunto de los números reales es no numerable, utilizando la elegante demostración que describimos a continuación.

Teorema 4 (Cantor). *El conjunto de los números reales es no numerable.*

Demostración.

Supongamos que □ es numerable. Sea

$I = \{x \in □ \mid 0 < x < 1\}$.

Como I es un subconjunto de □, se sigue que I es numerable. Por lo tanto existe una función biyectiva $f: □ \to I$. Para cada número natural n escribamos el número $f(n)$ en forma decimal, es decir,

$$f(n) = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ldots,$$

donde cada a_{nk} es un dígito. Para cada número natural n sea x_n un dígito distinto de a_{nn}. Por lo tanto el número

$$x = 0.x_1x_2x_3x_4\ldots$$

pertenece a I, pero $x \neq f(n)$, para todo número natural n, pues x difiere de $f(n)$ en el n-ésimo dígito, lo cual es una contradicción, pues f es biyectiva. Por lo tanto □ es no numerable.

Si A es un conjunto numerable, se dice que la cardinalidad de A es **aleph cero**, y escribimos $|A| = \aleph_0$. Si $A \sim R$, se dice que A tiene la cardinalidad del **continuo** y escribimos $|A| = c$.

Sean A y B dos conjuntos. Se dice que la cardinalidad de A es menor que la cardinalidad de B, si A no tiene la misma cardinalidad que B, pero existe una función inyectiva de A en B. Observa que $\aleph_0 < c$.

En el capítulo 3 vimos que si $|A| = n$, entonces $|\wp(A)| = 2^n$. Se puede demostrar que, para cualquier conjunto A,

$$|A| < |\wp(A)|.$$

También se puede demostrar que $|\wp(A)| = c$, por lo cabría preguntar: ¿existe un conjunto infinito cuya cardinalidad sea mayor que $\aleph_0$ y menor que c? Cantor conjeturó que no podía existir tal conjunto, sin embargo no pudo probarlo. Esta conjetura fue llamada la *hipótesis del continuo*. Este problema fue el primero de los famosos 23 problemas no resueltos presentados por David Hilbert en 1900, en ocasión del Congreso Internacional de Matemáticas en París. No fue sino hasta 1963 cuando fue finalmente resuelto, aunque en un sentido muy distinto al que Hilbert jamás se hubiera imaginado.

En 1938, Kurt Gödel demostró que se podía tomar libremente la hipótesis del continuo como un axioma adicional de la teoría de conjuntos de Zermel-Fraenkel. Esto fue la mitad de la solución de la conjetura de Cantor; no fue una demostración de la conjetura, sino una demostración de que no podía exhibirse un contraejemplo. En 1963, Paul Cohen demostró que también se podía tomar como un axioma la negación de la hipótesis del continuo. Al descubrimiento de Gödel de que no existía un contraejemplo a la hipótesis del continuo, se añadía el resultado de Cohen de que tampoco podía demostrarse.

Ejercicios

Muestra que el conjunto de los números naturales pares tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números naturales impares.

Demuestra que B $\subseteq$ A y B es infinito, entonces A es infinito.

Muestra que la intersección de dos conjuntos infinitos no es necesariamente un conjunto infinito.

Sean A y B dos conjuntos infinitos, tales que $B \subseteq A$. ¿Es $B-A$ necesariamente infinito? ¿Es B − A necesariamente finito?

Demuestra que el conjunto de los números primos es numerable