Alfaomega Grupo Editor

Fracciones Parciales

Ramón Espinoza Armenta

Apoyo en la web

AVC Apoyo Virtual para el Conocimiento

Una **expresión racional** con coeficientes en un campo *K*, es una expresión de la forma

$$\frac{a(x)}{b(x)}$$

donde $a(x), b(x) \in K[x]$ y $b(x) \neq 0$. Diremos que

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{c(x)}{d(x)}$$

si y sólo si $a(x)d(x) = b(x)c(x)$. El conjunto de expresiones racionales con coeficientes en *K* se denotará $K(x)$.

La suma de dos expresiones racionales se define como

$$\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)d(x) + b(x)c(x)}{b(x)d(x)}.$$

También definimos el producto de dos expresiones racionales como:

$$\frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)c(x)}{b(x)d(x)}.$$

Se puede verificar fácilmente que con estas operaciones $K(x)$ es un campo.
Una expresión racional $a(x)/b(x)$ se dice que es propia, si el grado de $a(x)$ es menor que el grado de $b(x)$. Si $a(x)/b(x)$ es una expresión racional impropia podemos utilizar el algoritmo de la división para escribir $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$, donde $r(x) = 0$ o grado $r(x) <$ grado $b(x)$, de esta manera

$$\frac{a(x)}{b(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}.$$

Por lo que toda expresión racional o es propia o se puede escribir como un polinomio más una expresión racional propia. Veremos a continuación cómo expresar una expresión racional propia como suma de expresiones racionales sencillas, llamadas fracciones parciales.

Lema 1.

Sean $a(x),\ b(x) \in K[x]$ *distintos de cero, tales que grado a(x) < grado b(x) y supongamos que*

$$b(x) = p_1(x)p_2(x),$$

donde $mcd(p_1(x), p_2(x)) = 1$*. Entonces existen polinomios* $r_1(x), r_2(x) \in K[x]$*, donde* $r_i(x) = 0$ *o grado* $r_i(x) <$ *grado* $p_1(x),\ i = 1,2$*, tales que*

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{r_1(x)}{p_1(x)} + \frac{r_2(x)}{p_2(x)}.$$

Demostración.

Como $mcd(p_1(x), p_2(x)) = 1$, existen $s(x), t(x) \in K[x]$ tales que $1 = s(x)p_1(x) + t(x)p_2(x)$. Por lo tanto

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{s(x)a(x)}{p_2(x)} + \frac{t(x)a(x)}{p_1(x)} = \frac{p(x)}{p_1(x)} + \frac{g(x)}{p_2(x)},$$

donde $f(x) = t(x)a(x)$ y $g(x) = s(x)a(x)$.

Ahora bien, por el algoritmo de la división, podemos escribir

$$f(x) = p_1(x)q_1(x) + r_1(x) \text{ y } g(x) = p_2(x)q_2(x) + r_2(x),$$

donde $r_1(x)=0$ o grado $r_1(x)<$ grado $p_1(x),\ \ i=1,2$. Por lo tanto

$$\frac{a(x)}{b(x)}=q_1(x)+\frac{r_1(x)}{q_1(x)}+q_2(x)+\frac{r_2(x)}{q_2(x)}.$$

Como grado $a(x)<$ grado $b(x)$, se sigue que $q_1(x)+q_2(x)=0$ y de ahí que

$$\frac{a(x)}{b(x)}=\frac{r_1(x)}{p_1(x)}=\frac{r_2(x)}{p_2(x)},$$

con $r_i(x)=0$ o grado $r_i(x)=0<$ grado $p_1(x),\ \ i=1,2$.

Lema 2.

Sean $a(x),b(x)\in K[x]$ *distintos de cero, tales que grado* $a(x)<$ *grado* $b(x)$ *y supongamos que*

$$b(x)=[p_1(x)]^{m1}[p_2(x)]^{m2}\cdots[p_k(x)]^{mk}$$

donde $p_1(x),p_2(x)...,p_k(x)$ *son polinomios distintos, irreducibles en* $K[x]$. Entonces existen polinomios $h_1(x),...,h_k(x)$, con grado $h_j(x)<$ grado $\left[p_j(x)\right]^{mj}$, para toda $j=1,...,k$, tales que

$$\frac{a(x)}{b(x)}=\frac{h_1(x)}{[p_1(x)]^{m1}}+\ldots+\frac{h_k(x)}{[p_k(x)]^{mk}}.$$

Demostración.

Haremos la demostración por inducción sobre k. Si $k=1$ basta tomar $h_1(x)=a(x)$. Supongamos cierto el resultado para algún k. Si

$$b(x)=[p_1(x)]^{m1}\cdots[p_k(x)]^{mk}[p_{k+1}(x)]^{mk+1},$$

entonces por el lema 1

$$\frac{a(x)}{b(x)}=\frac{f(x)}{[p_1(x)]^{m1}\cdots[p_k(x)]^{mk}}+\frac{g(x)}{[p_{k+1}(x)]^{mk+1}}.$$

Ahora bien, por hipótesis de inducción:

$$\frac{f(x)}{[p_1(x)]^{m1}\cdots[p_k(x)]^{mk}}=\frac{h_1(x)}{[p_1(x)]^{m1}}+\ldots+\frac{h_k(x)}{[p_k(x)]^{mk}}.$$

Por lo que haciendo $h_{k+1}(x)=g(x)$ se cumple el resultado.

Lema 3.

Sean $h(x), p(x)\in K[x]$ *tales que*

grad h(*x*) < *grado* [*p*(*x*)]^m,

entonces existen polinomios h1(*x*),...,*hm*(*x*), *donde hj*(*x*)=*0 o grado hj*(*x*) < *grado p*(*x*), *para toda j =1*,...,*m, tales que*

$$\frac{h(x)}{[p(x)]^m}=\frac{h_1(x)}{p(x)}+\frac{h_2(x)}{[p(x)]^2}+\ldots+\frac{h_m(x)}{[p(x)]^m}.$$

Demostración.

Haremos la demostración por inducción sobre m. Si m = 1 el resultado es trivialmente cierto. Supongamos ahora que el resultado es cierto para algún m $\geq$1. Por el algoritmo de la división:

$$h(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

donde $r(x)$=0 o grado $r(x)$ < grado $p(x)$. Por lo tanto

$$\frac{h(x)}{\left[p(x)^{m+1}\right]} = \frac{q(x)}{\left[p(x)^{m}\right]} + \frac{r(x)}{\left[p(x)^{m+1}\right]}$$

$$= \frac{h_1(x)}{p(x)} + \frac{h_2(x)}{\left[p(x)^{m}\right]} + \ldots + \frac{h_m(x)}{\left[p(x)^{m}\right]} + \frac{r(x)}{\left[p(x)^{m+1}\right]}.$$

Por lo que haciendo $h_{m+1}(x) = r(x)$ se cumple el resultado.

Teorema 1 (Fracciones parciales).

Sean $a(x), b(x) \in K\left[x\right]$ *distintos de cero, tales que grado* $a(x)$ *< grado* $b(x)$ *y supongamos que*

$$b(x) = \left[p_1(x)^{m1}\right]\left[p_2(x)^{m2}\right]\cdots\left[p_k(x)^{mk}\right]$$

donde $p_1(x), p_2(x)..., p_k(x)$ *son polinomios distintos, irreducibles en K*$[x]$*, entonces*

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{h_{ij}(x)}{\left[p_1(x)\right]^j},$$

donde $h_{ij}(x)$ *es cero o grado* $h_{ij}(x)$ *< grado* $p_i(x)$*, para toda i =1,...,k y para toda*

$j = 1,..., m_i$.

Demostración.

Se sigue directamente de los lemas anteriores.

Ejemplo 1.

Descomponer

$$\frac{7x-11}{(x-3)(x+2)}$$

en fracciones parciales en □ (x).

Solución.

$$\frac{7x-11}{(x-3(x+2)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-2}$$

$$=\frac{a\left(x+2\right)+b(x-3)}{\left(x-3\right)\left(x+2\right)}$$

Por lo tanto $7x - 11 = a(x + 2) + b(x - 3)$

En particular, evaluando en ambos lados en $x = 3$ tenemos que $10 = 5a$ y por lo tanto $a = 2$. Análogamente, si $x = -2$ tenemos que $-25 = -5b$ y de ahí que $b = 5$. En conclusión:

$$\frac{7x-11}{\text{(x-3)(x+2)}}=\frac{2}{\text{x-3}}+\frac{5}{\text{x+2}}.$$

Ejemplo 2.

Descomponer

$$\frac{4}{\left(x^2+1\right)}$$

en fracciones parciales en □ (x).

Solución.

$$\frac{4}{x^2+1}=\frac{4}{(x-i)(x+i)}$$

$$=\frac{a}{x-i}+\frac{b}{x+i}$$

$$=\frac{a(x+i)+b(x+i)}{x^2+1}$$

Por lo tanto *a* = $-2i$ y *b* =2*i*. De modo que

$$\frac{4}{x^2+1}=\frac{-2i}{x-i}+\frac{2i}{x+i}.$$

Ejemplo 3.

Descomponer

$$\frac{3x^4+5}{x(x^2+1)^2}$$

en fracciones parciales en □ (x).

Solución.

$$\frac{3x^4+5}{x(x^2+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{cx+d}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{a(x^2+1)^2+x(bx+c)(x^2+1)+(dx+e)x}{x(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(a+b)x^4+cx^3+(2a+b+d)x^2+(c+e)x+a}{x(x^2+1)^2}$$

Por lo tanto

$$a+b=3$$

$$c=0$$

$$2a+b+d=0$$

$$c+e=0$$

$$a=5$$

De ahí que a = 5, b = –2, c = 0, d = -8 y e =0, y por lo tanto

$$\frac{3x^4+5}{x(x^2+1)^2}=\frac{5}{x}+\frac{-2x}{x^2+1}+\frac{-8x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Ejercicios

1. Encuentra la descomposición de

$$\frac{2x-5}{(x-2i)(x+4)}$$

en fracciones parciales en □(x).

2. Encuentra la descomposición de

$$\frac{4x^2+8x+5}{(x+1)(x+2)^2}$$

en fracciones parciales en □(x).

3. Encuentra la descomposición de

$$\frac{5x^2-7x+26}{x(x^2-4x+13)}$$

en fracciones parciales en □(x).

4. Encuentra la descomposición de

$$\frac{5x^2-7x+26}{x(x^2-4x+13)}$$

en fracciones parciales en □(x).