Números reales

por

Ramón Espinosa

Existe un conjunto $\mathbb{R}$, cuyos elementos son llamados **números reales**. Los números reales satisfacen ciertas propiedades algebraicas y de orden que describimos a continuación.

1. Propiedades algebraicas

En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, está definida una operación $+$, llamada **suma** (o **adición**), una operación $\cdot$, llamada **producto** (o **multiplicación**), que satisfacen los siguientes axiomas:

S1) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b \in \mathbb{R}$.
S2) Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
S3) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$.
S4) Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
S5) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$.
M1) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b \in \mathbb{R}$.
M2) Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
M3) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$.
M4) Existe $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
M5) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
D) Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Los axiomas (S1) y (M1) son las **leyes de la cerradura** de la suma y el producto, respectivamente. Los axiomas (S2) y (M2) son las **leyes asociativas**. Los axiomas (S3) y (M3) son las **leyes conmutativas**. El axioma (S4) establece la existencia de un número real, denotado con el símbolo 0 y llamado **cero**, que es **neutro aditivo**. Análogamente, el axioma (M4) establece la existencia de un número real, denotado con el símbolo 1 y llamado **uno**, que es **neutro multiplicativo**. El axioma (S5) establece que todo número real a tiene un **inverso aditivo**, denotado $-a$. El axioma (M5) establece que todo número real $a \neq 0$ tiene un **inverso multiplicativo**, denotado a^{-1}. El axioma (D) es la **ley distributiva**.

Observa que, por definición, el inverso aditivo de $-a$ es a, es decir, $-(-a) = a$. Se acostumbra escribir $a-b$ en lugar de $a+(-b)$. Por simplicidad prescindiremos de aquí en adelante del símbolo $\cdot$ y escribiremos simplemente el producto como ab. Se acostumbra escribir:

$$\frac{a}{b}$$

o a/b, en lugar de ab^{-1}. Veremos ahora cómo, a partir de los axiomas anteriores, se pueden demostrar otras propiedades algebraicas de los números reales.

Nuestro primer resultado establece la **ley de cancelación** para la suma.

Teorema 1. *Para cualesquiera* $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$*, si* $a + c = b + c$*, entonces* $a = b$*.*

Demostración. Supongamos que

$$a + c = b + c.$$

Sumando $-c$ en ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c).$$

Por lo que, por el axioma (S2):

$$a + (c + (-c)) = b + (c + (-c)).$$

De ahí que, por los axiomas (S5) y (S4), $a = b$. □

El siguiente teorema muestra que si un producto es igual a cero, entonces alguno de los factores es igual a cero.

Teorema 2. *Sean* $a,\ b \in \mathbb{R}$*, tales que* $ab = 0$*, entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$*.*

Demostración. Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1}(ab) = a^{-1}0$ y de ahí que $b = 0$. □

El siguiente teorema establece la **ley de cancelación** para el producto.

Teorema 3. *Para cualesquiera* $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$*, si* $ac = bc$ *y* $c \neq 0$*, entonces* $a = b$*.*

Demostración. Supongamos que $ac = bc$. Sumando $-bc$ en ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$ac - bc = 0.$$

Por lo tanto

$$(a - b)c = 0.$$

Como $c \neq 0$, se sigue del teorema anterior que $a - b = 0$, y por lo tanto $a = b$. $\square$

El siguiente teorema muestra que al multiplicar cualquier entero por cero el resultado es igual a cero.

Teorema 4. *Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a0 = 0$.*

Demostración. $a0 + 0 = a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$. Por lo que, cancelando términos, obtenemos que $a0 = b$. $\square$

El siguiente resultado establece las **leyes de los signos**.

Teorema 5. *Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$,*
1) $a(-b) = -ab = (-a)b$;
2) $(-a)(-b) = ab$.

Demostración. 1) $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a0 = 0$. Por lo tanto $a(-b)$ es el inverso aditivo de ab, es decir, $a(-b) = -ab$. Análogamente, $(-a)b = -ab$.
2) Por la propiedad anterior: $(-a)(-b) = -(-a)b = -(-ab) = ab$. $\square$

2. Propiedades de orden

En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, está definida una relación de **orden** $\leq$, que satisface los siguientes axiomas:

O1) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ o $b \leq a$.
O2) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
O3) Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
O4) Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.
O5) Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $0 \leq c$, entonces $ac \leq bc$.

El axioma (O1) asegura que el orden es **completo**. El axioma (O2) asegura que el orden es **antisimétrico**. El axioma (O3) indica que el orden es **transitivo**. El axioma (O4) establece que el orden es compatible con la suma. El axioma (O5) indica que el orden es parcialmente compatible con el producto.

Si $a \leq b$ diremos que a es menor o igual que b o que b es mayor o igual que a. También podemos escribir $b \geq a$. Si $a \leq b$ y $a \neq b$ escribiremos $a < b$ (o $b > a$) y diremos que a es menor que b (o que b es mayor que a).

Teorema 6. *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple una y solamente una de las siguientes afirmaciones:*

$$a < b \qquad o \qquad a = b \qquad o \qquad b < a.$$

Demostración. Por el axioma (O1), $a \leq b$ o $b \leq a$. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$. Si $a \leq b$ y $a \neq b$, entonces $a < b$. Por último, si $b \leq a$ y $a \neq b$, entonces $b < a$. □

Teorema 7. *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$, entonces $-b \leq -a$.*

Demostración. Supongamos que $a \leq b$. Sumando $-a$ en ambos lados de la desigualdad obtenemos $a - a \leq b - a$, y por lo tanto $0 \leq b - a$. Si ahora sumamos $-b$ en ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$-b \leq (b - a) - b = -a.$$

□

Corolario 1. *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, si $a < b$, entonces $-b < -a$.*

Teorema 8. *Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si $a \leq b$ y $c \leq 0$, entonces $bc \leq ac$.*

Demostración. Como $c \leq 0$, se sigue del teorema anterior que $0 \leq -c$. Si multiplicamos ambos lados de la desigualdad $a \leq b$ por $-c$ obtenemos

$$a(-c) \leq b(-c)$$

y por lo tanto

$$-ac \leq -bc.$$

Por lo que, por el teorema anterior, $bc \leq ac$. □

Corolario 2. *Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a < b$ y $c < 0$, entonces $bc < ac$.*

Si a es un número real escribiremos a^2 en lugar de aa. El número a^2 se lee "a al cuadrado". El siguiente resultado asegura que el cuadrado de cualquier número real distinto de cero tiene que ser mayor que cero.

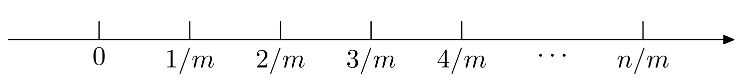
Teorema 9. *Para cualquier* $a \in \mathbb{R}$, *si* $a \neq 0$, *entonces* $a^2 > 0$.

Demostración. Si $a > 0$ entonces $aa > a0 = 0$. Si $a < 0$ entonces $-a > 0$ y por lo tanto $a^2 = (-a)(-a) > 0$. □

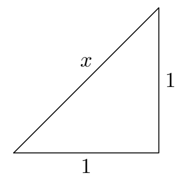
Un número real a se dice que es **positivo** si $a > 0$. Si $a < 0$ se dice que a es **negativo**. Observa que $1 > 0$, pues $1 = 1^2 \geq 0$. Podemos identificar el neutro aditivo de los números reales con el entero 0, también podemos identificar el neutro multiplicativo de los números reales con el entero positivo 1, análogamente identificamos el número real $1 + 1$ con el entero positivo 2, y así sucesivamente. De esta manera los números reales contienen a todos los enteros no negativos. Además si n es un entero positivo, su inverso aditivo $-n$ también es un número real, y por lo tanto $\mathbb{R}$ contiene al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Por otra parte, si a/b es un número racional, podemos identificar este número con el número real ab^{-1}, por lo tanto $\mathbb{R}$ contiene al conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$.

3. La recta real

Los números reales pueden representarse geométricamente como puntos en una recta horizontal, en la que se ha elegido un punto arbitrario para representar al cero y otro punto arbitrario, a la derecha del cero, para representar al uno. La distancia entre esos puntos es tomada como unidad de medida. El punto correspondiente al número 2 se localiza a una unidad a la derecha del punto correspondiente a 1; el número 3 se encuentra a una unidad a la derecha del número 2, y así sucesivamente. Análogamente, el número -1 se localiza a una unidad a la izquierda del 0, el número -2 se encuentra a una unidad a la izquierda del -1, y así sucesivamente. De geometría elemental sabemos que podemos dividir la unidad en m partes iguales, utilizando sólo regla y compás. Esto permite localizar cualquier número racional n/m sobre la recta, como lo muestra la siguiente figura.



En el siglo V a. C., los Pitagóricos afirmaban que la longitud de cualquier segmento de recta correspondía a un número racional, sin embargo, si consideramos un triángulo rectángulo con catetos de longitud uno, y x es la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo,



entonces por el teorema de Pitágoras, $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Se puede demostrar que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2 (ver ejemplo 1.10 en el libro). Los Pitagóricos trataron de mantener en secreto la existencia de longitudes que no correspondían a números racionales. Se dice que *Hipaso*, el discípulo que reveló el secreto, murió en circunstancias misteriosas.

Los números racionales satisfacen todas las propiedades algebraicas y de orden descritas en las secciones anteriores, por lo que estos axioman no caracterizan a los números reales, pensados como puntos de la recta. Los números reales satisfacen un axioma adicional, llamado **principio del supremo**, que captura la esencia de la continuidad de la recta, es decir, llena los huecos dejados por los números racionales.

A partir del principio del supremo se puede demostrar que si a es un número real no negativo, existe un único $b \geq 0$, tal que $b^2 = a$. El número b es llamado la **raíz cuadrada** de a y se denota $\sqrt{a}$.

Como no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a dos, el número $\sqrt{2}$ no es racional. Los números reales que no son racionales son llamados **números irracionales**. Otros números irracionales importantes son π, la razón de la circunferencia de cualquier círculo a su diámetro, y e, la base de la función exponencial, que se estudia en cursos de Cálculo.

4. Representación decimal

Sea x un número real y sea n el mayor entero menor o igual que x. Sea n_1 el mayor entero no negativo tal que $n + n_1/10 \leq x$. Análogamente, sea n_2 el mayor entero no negativo tal que $n + n_1/10 + n_2/10^2 \leq x$, y en general, para cada número natural k, sea n_k el mayor entero no negativo tal que

$$n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \leq x.$$

Observa que cada n_k es un dígito, es decir, $n_k \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 9\}$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Se acostumbra escribir

$$x = n.n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots$$

A esta expresión se le llama la **representación decimal** de x.

Se puede demostrar que un número es racional si y sólo si su representación decimal es finita o periódica, por ejemplo,

$$\frac{7}{5} = 1.4$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333333\ldots$$

Los números irracionales tienen una representación decimal infinita no periódica, por ejemplo,

$$\sqrt{2} = 1.4142136\ldots$$

$$\pi = 3.14159265\ldots$$

$$e = 2.7182818\ldots$$

5. La ecuación cuadrática

El siguiente teorema establece condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación cuadrática tenga soluciones reales. Además establece la forma de las soluciones.

Teorema 10. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Entonces la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones reales si y sólo si $b^2 - 4ac \geq 0$. Además las soluciones están dadas por la fórmula:*

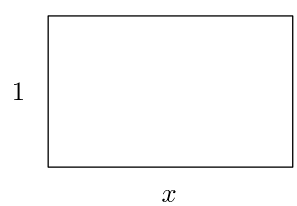
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{bx}{a}\right)=-c \\
&\Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)=\frac{b^2}{4a}-c \\
&\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a} \\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.
\end{aligned}
$$

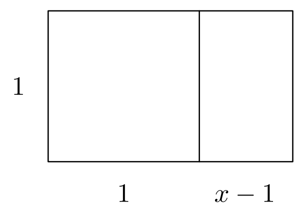
□

Ejemplo 1. Consideremos un rectángulo de lados 1 y x, donde $x>1$.



¿Cuál debe ser el valor de x para que al dividir el rectángulo con una línea vertical, se obtenga un cuadrado de lado 1 y un rectángulo que tenga la misma proporción que el rectángulo original?

Solución. Consideremos la figura



Necesitamos que
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$
lo cual nos conduce a la ecuación cuadrática
$$x^2 - x - 1 = 0.$$
Por el teorema anterior esta ecuación tiene soluciones: $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Como $x > 0$, descartamos la solución negativa y obtenemos
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
El número que hemos obtenido se conoce como **razón aúrea**. Este número es conocido desde la antigüedad y aparece con frecuencia en el arte y en la naturaleza. $\triangle$

6. Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real a, denotado por el símbolo $|a|$, se define como
$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0; \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

El siguiente teorema establece algunas propiedades del valor absoluto.

Teorema 11. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*
a) $|a| \geq 0$. *Además* $|a| = 0$ *si y sólo si* $a = 0$.
b) $|ab| = |a||b|$.
c) $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Demostración. La propiedades (a) y (b) se dejan al lector. Para probar la propiedad (c) observemos que

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2+2ab+b^2 \\ &= |a|^2+2ab+|b|^2 \\ &\leq |a|^2+2|ab|+|b|^2 \\ &= |a|^2+2|a||b|+|b|^2 \\ &= (|a|+|b|)^2. \end{aligned}$$

Como tanto $|a+b|$ como $(|a|+|b|)$ son no negativos, se sigue que

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

$\square$

Ejercicios

1. Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$, tales que $a > 0$ y $b > 0$. Demuestra que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
2. Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$, tales que $0 < a < b$. Demuestra que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
3. En cada inciso resuelve la ecuación indicada.
   a) $x^2 - x - 2 = 0$.
   b) $2x^2 + 3x + 1 = 0$.
   c) $6x^2 - x - 1 = 0$.
4. En cada inciso resuelve la ecuación indicada.
   a) $x^4 + x^2 - 2 = 0$.
   b) $x^3 - x^2 - 6x = 0$.
   c) $x^6 - 1 = 0$.

5. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestra que $|-a| = |a|$.
6. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestra que $\sqrt{a^2} = |a|$.
7. Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$. Demuestra que

$$|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b.$$

8. Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$. Demuestra que

$$|a| > b \quad \Leftrightarrow \quad a < -b \quad \text{o} \quad a > b.$$

9. Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$. Demuestra que $|a/b| = |a|/|b|$.
10. Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$. Demuestra que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.