La fórmula de Cayley

por

Ramón Espinosa Armenta

En 1889, Arthur Cayley estableció una fórmula para el número de árboles generadores distintos de la gráfica completa K_n con la etiquetación estándar de los vértices $1, 2, \ldots, n$. En 1918, el alemán *H. Prüfer* obtuvo una elegante demostración de la fórmula de Cayley estableciendo una correspondencia biyectiva entre árboles etiquetados con n vértices y sucesiones de longitud $n-2$, llamadas códigos de Prüfer.

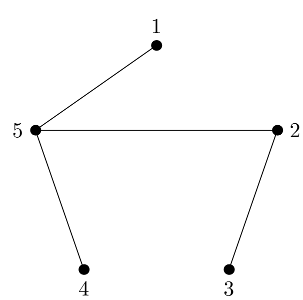
El código de Prüfer $P(T)$ de un árbol T no trivial, se define recursivamente de la siguiente manera. Si $|V(T)| = 2$ entonces T consiste de una sola arista y $P(T)$ es la palabra vacía, es decir $P(T) = \emptyset$. Supongamos ahora que el código de Prüfer está definido para cualquier árbol con n vértices y sea T un árbol con $n+1$ vértices. Sea

$$v = \min\{i \in V(T) \mid \; d_T(i) = 1\}$$

y sea u el único vértice adyacente a v en T. Por lo tanto $T - v$ es un árbol etiquetado con n vértices, por lo que $P(T-v)$ está bien definido por hipótesis de inducción. Definamos ahora el código de Prüfer de T como:

$$P(T) = (u, P(T-v)).$$

Ejemplo 1. Consideremos el árbol etiquetado de la figura de abajo.



El vértice de grado uno que tiene etiqueta más pequeña es el vértice 1, el cual es adyacente al vértice 5, por lo que $P(T) = (5, P(T-1))$. Al remover el vértice 1 obtenemos una trayectoria de longitud tres. El vértice de grado uno que tiene etiqueta más pequeña es el vértice 3, el cual es adyacente al vértice 2, por lo que $P(T) = (5, 2, P((T-1)-3))$. Al quitar el vértice 3 de esta gráfica obtenemos una trayectoria de longitud dos. El vértice 2 es el vértice de grado uno con etiqueta más pequeña y es adyacente al vértice 5, el cual se incorpora a la lista. Al remover el vértice 2 obtenemos un árbol con dos vértices, al cual le corresponde la lista vacía. De esta manera el código de Prüfer del árbol es $(5, 2, 5)$. $\triangle$

Como vimos en el ejemplo anterior, no todos los vértices aparecen en el código de Prüfer, por otra parte hay vértices que aparecen más de una vez. El número de veces que un vértice aparece en la lista depende del grado del vértice, como lo muestra el siguiente lema.

Lema 1. *Sea a_i el número de veces que aparece el número i en el código de Prüfer de un árbol etiquetado T con $n \geq 3$ vértices. Entonces $d_T(i) = a_i + 1$.*

Demostración. Si $n = 3$ entonces $P(T)$ consiste de un solo número, correspondiente al vértice de grado dos.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para todo árbol etiquetado con $n \geq 3$ vértices. Sea T un árbol etiquetado con $n+1$ vértices, $v = \min\{i \in V(T) \mid d_T(i) = 1\}$ y sea u el único vértice adyacente a v en T. Por lo tanto $P(T) = (u, P(T-v))$. Para cada $i \in V(T)$ sea b_i el número de veces que aparece i en $P(T-v)$. Por hipótesis de inducción

$$d_{T-v}(i) = b_i + 1.$$

Además, si $i \neq u$ entonces $a_i = b_i$ y $d_T(i) = d_{T-v}(i)$. Por lo tanto $d_T(i) = a_i + 1$. Por otra parte, si $i = u$ entonces $a_i = b_i + 1$ y $d_T(i) = d_{T-v}(i) + 1$. Por lo tanto $d_T(i) = b_i + 2 = a_i + 1$. $\square$

El siguiente lema muestra que el código de Prüfer define una función inyectiva del conjunto de árboles generadores con n vértices al conjunto de palabras de longitud $n-2$ del alfabeto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Lema 2. *Si T y T' son dos árboles etiquetados con $n \geq 3$ vértices, tales que $P(T) = P(T')$, entonces $T = T'$.*

Demostración. Si $n = 3$ entonces $P(T)$ consiste de un solo número, correspondiente al único vértice de grado dos de T. Como $P(T) = P(T')$, este vértice también es el único vértice de grado dos de T' y por lo tanto $T = T'$.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para cualesquiera dos árboles etiquetados con n vértices. Sean T y T' dos árboles etiquetados con $n+1$ vértices, tales que $P(T) = P(T')$. Sea v el mínimo elemento de $\{1, \ldots, n\}$ que no aparece en $P(T)$. Por el lema anterior $d_T(v) = 1$ y $d_{T'}(v) = 1$. Por lo tanto existe un único u tal que u es adyacente a v en T y existe un único w tal que w es adyacente a v en T'. De ahí que $P(T) = (u, P(T - v))$ y $P(T') = (w, P(T' - v))$. Como $P(T) = P(T')$, se sigue que $u = w$, por lo tanto $P(T - v) = P(T' - v)$. Por lo que, por hipótesis de inducción, $T - v = T' - v$. Con lo cual concluimos que $T = T'$. $\square$

El siguiente lema muestra que a cada palabra de longitud $n-2$ del alfabeto $\{1, 2, \ldots, n\}$ le corresponde un árbol cuyo código de Prüfer es esa palabra.

Lema 3. *Sea $n \geq 3$. Si $L = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-2})$ es una lista cuyos elementos pertenecen al conjunto $V = \{1, \ldots, n\}$, entonces existe un árbol etiquetado T tal que $P(T) = L$.*

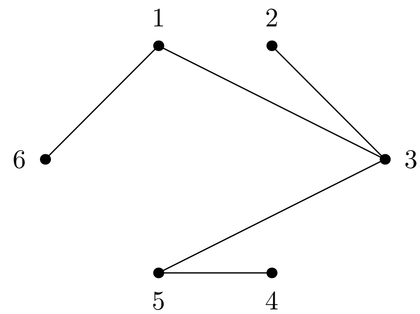
Demostración. Si $n = 3$ entonces $L = (u_1)$, por lo tanto T es la trayectoria de longitud dos que tiene a u_1 como vértice interno.

Supongamos que el resultado es cierto para toda lista de longitud $n - 2$. Sea $L = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ una lista de longitud $n - 1$. Sea v el más pequeño elemento de V que no aparece en L. Por hipótesis de inducción existe un árbol T' con conjunto de vértices $V(T') = \{1, \ldots, n + 1\} - \{v\}$, tal que $P(T') = (u_2, u_3, \ldots, u_{n-1})$. Sea e la arista que une a v con u_1 y sea $T = T' + e$. Por lo tanto T es un árbol y además $P(T) = (u_1, P(T')) = L$. $\square$

El siguiente ejemplo ilustra el método descrito en el lema anterior para hallar un árbol generador correspondiente a una lista dada.

Ejemplo 2. Consideremos la lista $(3, 5, 3, 1)$. La longitud de esta lista es cuatro, por lo que corresponde a un árbol con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El primer vértice que no aparece en la lista es 2, el cual debe ser adyacente al vértice 3. Consideremos ahora la sublista $(5, 3, 1)$, el primer vértice del conjunto $\{1, 3, 4, 5, 6\}$ (obtenido al remover el vértice 2) que no aparece en la lista es el 4, que debe ser adyacente al vértice 5. Análogamente, el primer vértice del conjunto $\{1, 3, 5, 6\}$ que no aparece en la sublista $(3, 1)$ es el 5, el cual debe ser adyacente al vértice 3; el primer vértice del conjunto

$\{1, 3, 6\}$ que no aparece en la sublista (1) es el 3, el cual debe ser adyacente al vértice 1; finalmente obtenemos la lista vacía y el conjunto $\{1, 6\}$, lo cual indica que el vértice 1 debe ser adyacente al vértice 6. La figura de abajo muestra el árbol correspondiente a la lista $(3, 5, 3, 1)$.



$\triangle$

Teorema 1 (Fórmula de Cayley)**.** *Hay n^{n-2} árboles etiquetado distintos con n vértices.*

Demostración. Si $n = 1$ o $n = 2$ el resultado es claramente cierto. Si $n \geq 3$ se sigue de los lemas 2 y 3 que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de árboles generadores con n vértices y el conjunto de palabras de longitud $n - 2$ del alfabeto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Como el número de palabras de longitud $n - 2$ de un alfabeto con n elementos es n^{n-2}, entonces hay n^{n-2} árboles etiquetado distintos con n vértices. $\square$

Ejercicios

1. Determina los árboles con 8 vértices correspondientes a los siguientes códigos de Prüfer:

   a) $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$
   b) $(2, 3, 4, 5, 6, 7)$
   c) $(2, 3, 4, 5, 6, 6)$
   d) $(3, 3, 4, 5, 6, 6)$

2. Da una condición para que el código de Prüfer corresponda a una trayectoria o a una estrella.

3. Dibuja los 16 árboles etiquetados distintos con cuatro vértices, y determina el código de Prüfer de cada uno de ellos.