

# Los problemas de Hilbert

por

Ramón Espinosa Armenta

El 8 de Agosto de 1900, en París, en el marco del Segundo Congreso Internacional de Matemáticos, el matemático alemán David Hilbert dio una plática titulada *Problemas Matemáticos*, donde presentó una lista de problemas que creía cruciales para el desarrollo de la matemática en el Siglo XX. Por razones de tiempo Hilbert expuso solamente diez problemas, posteriormente Hilbert publicó un artículo donde extendió la lista a 23 problemas.

En 1900 Hilbert tenía 38 años, era Profesor de la Universidad de Göttingen y era considerado uno de los líderes matemáticos de su generación. A los 26 años Hilbert había demostrado un importante resultado acerca de invariantes algebraicos que le valió el reconocimiento de Felix Klein. Posteriormente Hilbert incursionó en Teoría de Números, dando demostraciones sencillas y elegantes de la trascendencia de  $\pi$  y  $e$ . En 1899 Hilbert había publicado el libro *Los Fundamentos de Geometría*, donde establecía un conjunto de axiomas que finalmente eliminaban los problemas de la geometría euclidiana. A fines del siglo XX, además de su interés por la axiomatización, Hilbert estaba interesado en ecuaciones diferenciales parciales, cálculo de variaciones y física matemática.

Hilbert se dio cuenta que había mucho trabajo por hacer en Matemática, y que no podía hacerlo solo, por esa razón decidió elaborar su famosa lista de problemas. Los problemas cumplían con la exigencia de Hilbert de que: “un problema matemático debe ser suficientemente difícil como para atraernos, pero no completamente inaccesible como para resistir nuestro esfuerzo”. Veremos a continuación algunos de los problemas de Hilbert.

La lista de problemas estaba encabezada por la Hipótesis del Continuo: no existe un conjunto infinito cuya cardinalidad sea mayor que  $\aleph_0$  y menor que  $\mathfrak{c}$ . Durante muchos años Cantor había tratado en vano de probar este resultado. No fue sino hasta 1963 cuando fue finalmente resuelto, aunque en un sentido muy distinto al que Hilbert jamás se hubiera imaginado.

El segundo problema de la lista consistía en probar la consistencia de los axiomas de la aritmética, es decir, probar que no es posible demostrar a partir de los axiomas de la aritmética, que una proposición y su negación sean ambas verdaderas. Este problema condujo a dos de los resultados más importantes de las matemáticas modernas: los teoremas de Gödel.

El sexto problema consistía en dar una axiomatización para aquellas ramas de la física en la que la matemática juega un papel importante. Para atacar este problema Hilbert sugirió identificar primero un pequeño número de axiomas que incluyera una amplia clase de fenómenos físicos, y luego añadir nuevos axiomas para arribar gradualmente a teorías más especializadas.

El problema ocho era la Hipótesis de Riemann, es decir, probar que los puntos donde se hace cero la función  $\zeta(z)$  definida por la serie

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots$$

todos tienen parte real  $1/2$ , excepto los ceros reales enteros negativos. La solución de este problema permitiría contestar preguntas importantes relacionadas con números primos, en particular la *Conjetura de Goldbach* que asegura que todo número par mayor que dos se puede escribir como la suma de dos números primos, o la existencia de un número infinito de *primos mellizos*, es decir, números primos cuya diferencia sea dos.

El problema diez consistía en: “diseñar un proceso por medio del cual se pueda determinar a partir de un número finito de operaciones cuándo la ecuación tiene soluciones enteras”. La búsqueda de una solución a este problema condujo a Alan Turing a precisar la noción de algoritmo. En 1970 el matemático ruso Yuri Matiyasevich contestó negativamente la pregunta de Hilbert, es decir, no existe un algoritmo para el que, dada una ecuación Diofantina arbitraria, se pueda decir si la ecuación tiene solución o no.

Hilbert aseguraba que: “una rama de la ciencia esta viva mientras ofrezca problemas en abundancia; la falta de problemas es signo de muerte”. En el transcurso de su vida Hilbert pudo ser testigo de la solución total o parcial de muchos de sus problemas. Desafortunadamente también fue testigo del desmantelamiento de la ciencia alemana por parte de los nazis. David Hilbert murió el 14 de febrero de 1943 a la edad de 81 años.

Tres palabras de Hilbert, pronunciadas después de su retiro de la Universidad de Göttingen en 1930, reflejan el entusiasmo que lo alentó toda su vida: “Debemos conocer. Conoceremos.”

**Lecturas adicionales recomendadas:**

1. Grattan-Guinness, I., A Sideways Look at Hilbert’s Twenty-three Problems of 1900, *Notices Amer. Math. Soc.*, **47** (2000), 752-757.
2. Hilbert, D., Mathematical Problems, *Bull. of Amer. Math. Soc.*, **8**, (1902), 437-479.
3. Yandell, B. H. *The Honors Class*, A. K. Peters, 2002.