La Fórmula de Burnside

por

Ramón Espinosa Armenta

En este artículo veremos una aplicación de teoría de grupos a problemas de conteo involucrando simetrías.

Sea G un grupo de permutaciones de un conjunto finito X. El **estabilizador** de X es el conjunto

$$E(x) = \{\sigma \in G \mid \ \sigma(x) = x\}.$$

Se puede probar fácilmente que $E(x)$ es un subgrupo de G para todo $x \in X$.

Sea G un grupo de permutaciones de un conjunto finito X y sea $\sigma \in G$. Un elemento $x \in X$ se dice que es **invariante** bajo σ si $\sigma(x) = x$. Denotaremos por $I(\sigma)$ al conjunto de puntos invariantes bajo σ.

Lema 1. *Sea G un grupo de permutaciones de un conjunto finito X, entonces*

$$\sum_{x\in X} |E(x)| = \sum_{\sigma \in G} |I(\sigma)|.$$

Demostración. Si q es una proposición definamos $verdad(q) = 1$ si q es verdadera y $verdad(q) = 0$ si q es falsa. Con esta notación observemos que, para toda $x \in X$,

$$|E(x)| = |\{\sigma \in G \mid \ \sigma(x) = x\}| = \sum_{\sigma \in G} verdad(\sigma(x) = x).$$

Análogamente, para toda $\sigma \in G$,

$$|I(\sigma)| = |\{x \in X \mid \ \sigma(x) = x\}| = \sum_{x \in X} verdad(\sigma(x) = x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X} |E(x)| &= \sum_{x\in X}\sum_{\sigma\in G} verdad(\sigma(x)=x)\\ &= \sum_{\sigma\in G}\sum_{x\in X} verdad(\sigma(x)=x)\\ &= \sum_{\sigma\in G} |I(\sigma)|.\end{aligned}$$

□

Lema 2. *Sea G un grupo de permutaciones actuando sobre un conjunto finito X, entonces*

$$|E(x)| = \frac{|G|}{|orb(x)|} \qquad \textit{para toda } x \in X.$$

Demostración. Supongamos que $orb(x) = \{x_1, x-2, \ldots, x_k\}$, con $x_1 = x$. Para toda $j = 1, \ldots, k$, sea $G_j = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x_j\}$. Por lo tanto $G_1 = E(x)$. Observemos que si $\sigma_j \in G_j$ entonces la función $f : G_1 \to G_j$ definida por

$$f(\sigma) = \sigma_j \circ \sigma$$

es una biyección, por lo tanto $|G_j| = |G_1| = |E(x)|$ para toda $j = 1, \ldots, k$. De ahí que

$$|G| = \sum_{j=1}^{k} |G_j| = k|E(x)|.$$

Que es lo que queríamos probar. □

Lema 3. *Sea G un grupo de permutaciones actuando sobre un conjunto finito X y supongamos que G tiene N órbitas, entonces*

$$\sum_{x\in X} \frac{1}{|orb(x)|} = N.$$

Demostración. Sean $X_1, \ldots, X_N$ las órbitas, por lo tanto $X = X_1 \cup \ldots \cup X_N$

y de ahí que

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X}\frac{1}{|orb(x)|} &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{X_j}\frac{1}{|orb(x)|}\\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{X_j}\frac{1}{|X_j|}\\
&= \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{|X_j|}\sum_{X_j}1\\
&= \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{|X_j|}|X_j| = N.
\end{aligned}$$

□

El siguiente teorema muestra cómo contar el número de órbitas de un grupo de permutaciones de X.

Teorema 1 (Fórmula de Burnside)**.** *Sea G un grupo de permutaciones actuando sobre un conjunto finito X y supongamos que G tiene N órbitas, entonces*

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}|I(\sigma)|.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}|I(\sigma)| &= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|E(x)| && \text{por el lema 1}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}\frac{|G|}{|orb(x)|} && \text{por el lema 2}\\
&= \sum_{x\in X}\frac{1}{|orb(x)|} = N && \text{por el lema 3.}
\end{aligned}$$

□

La fórmula de Burnside puede utilizarse para resolver problemas de conteo involucrando simetrías, como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. ¿Cuántos collares distintos pueden hacerse con 5 cuentas blancas y 3 cuentas negras?

Solución. Podemos pensar que las 8 cuentas son los vértices de un polígono regular con 8 lados. Cada configuración está especificada por la elección de los vértices ocupados por las cuentas negras, por lo que hay

$$\binom{8}{3} = 56$$

configuraciones en total. Dos configuraciones corresponden al mismo collar si una puede obtenerse de la otra por medio de una transformación simétrica del polígono: una rotación o una reflexión.

La identidad deja fijas las 56 configuraciones. Hay 7 rotaciones, ninguna de las cuales deja configuraciones fijas. Hay 4 reflexiones de ejes uniendo los puntos medios de lados opuestos, ninguna de las cuales tiene configuraciones fijas. Por último, hay 4 reflexiones de ejes pasando a través de vértices opuestos. En este caso una configuración es invariante sólo si una de las cuentas negras ocupa uno de los dos vértices por los que pasa el eje y las otras dos cuentas negras ocupan una de las tres parejas de vértices simétricos con respecto a ese eje, por lo que hay $2(3) = 6$ configuraciones fijas por cada reflexión de este tipo.

En total hay $1 + 7 + 4 + 4 = 16$ simetrías las cuales dejan en total $56 + 4(6) = 80$ configuraciones fijas, por lo que, por el teorema de Burnside hay $80/16 = 5$ collares distintos. $\triangle$

Ejemplo 2. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colorear las aristas de un triángulo equilátero, si hay cinco colores disponibles, solamente un color es usado en cada arista y el mismo color puede utilizarse en diferentes aristas?

Solución. Hay $5^3 = 125$ maneras de pintar las aristas, ya que cada arista puede ser de uno de los cinco colores disponibles. Dos triángulos coloreados son equivalentes si uno puede obtenerse apartir del otro por medio de una transformación simétrica del triángulo. Como vimos en el ejemplo **??** hay seis transformaciones posibles.

La identidad deja fijas las 125 coloraciones. Una coloración permanece invariante bajo una rotación de 120^o solamente si todas las aristas tienen el mismo color, por lo que hay 5 coloraciones fijas para esta transformación.

Análogamente, una rotación de 240^o tiene 5 coloraciones fijas. Hay 3 reflexiones, en cada caso una coloración permanece invariante sólo si las aristas que se intercambian tienen el mismo color, la arista restante puede ser de cualquier color, por lo que hay $5(5) = 25$ coloraciones fijas para cada refexión.

En total hay $125 + 5 + 5 + 25 + 25 + 25 = 210$ coloraciones fijas, por lo que, por el teorema de Burnside hay $210/6 = 35$ coloraciones distintas. $\triangle$

Ejercicios:

1. Sea G un grupo de permutaciones de un conjunto finito X. Demuestra que
$$E(x) = \{\sigma \in G \mid \ \sigma(x) = x\}$$
es un subgrupo de G para todo $x \in X$.

2. ¿De cuántas maneras se pueden colorear los vértices de un cuadrado con 5 colores, considerando dos coloraciones iguales si se puede obtener una a partir de la otra por medio de una rotación o una reflexión?

3. ¿De cuántas maneras se pueden colorear los vértices de un pentágono con 4 colores, considerando dos coloraciones iguales si se puede obtener una a partir de la otra por medio de una rotación o una reflexión?