Números complejos

por

Ramón Espinosa Armenta

En el siglo XVI, el matemático italiano *Gerolamo Cardano* se preguntó si tenía sentido considerar raíces cuadradas de números negativos. Tal raíz cuadrada debería de cumplir las propiedades de la raíz cuadrada usual, en particular, si $b > 0$, entonces

$$\sqrt{-b} = \sqrt{(-1)b} = \sqrt{-1}\sqrt{b},$$

donde el número $\sqrt{b}$ es la raíz cuadrada usual, pero el número $\sqrt{-1}$ no corresponde a ningún número "real", por lo que Cardano le llamó número "imaginario". Aceptando que tal número existe, toda ecuación cuadrática con coeficientes reales tiene solución, las cuales son de la forma

$$a + \sqrt{-1}b,$$

donde a, b son números reales. Tales números son llamados números complejos. Cardano observó que podía sumar y multiplicar números complejos, suponiendo que la propiedades algebraicas usuales seguían siendo válidas. Esta idea intuitiva de los números complejos fue clarificada por Gauss a fines del siglo XVIII. Algunos años después, el matemático francés *Jean-Robert Argand* sugirió interpretar los números complejos como parejas ordenadas de números reales. A continuación veremos la definición formal del sistema de los números complejos, y estudiaremos sus propiedades.

El sistema de los **números complejos** consta del conjunto $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, junto con la suma

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

y el producto

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Ejemplo 1. Si $z = (3, -1)$ y $w = (1, 2)$, entonces

$$z + w = (4, 1) \quad \text{y} \quad zw = (5, 5).$$

△

Teorema 1. *El sistema de los números complejos* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un campo.*

Demostración. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b)$, por lo que la suma es conmutativa. Análogamente se prueba que la suma es asociativa (ejercicio 1). Por otra parte, $(a,b)+(0,0)=(a,b)$, de modo que $(0,0)$ es el neutro aditivo. Se puede ver fácilmente que el inverso aditivo de (a,b) es $(-a,-b)$.

Se deja al lector probar que el producto de números complejos es asociativo y conmutativo (ejercicios 2 y 3). Observemos además que $(a,b)(1,0)=(a1-b0, a0+b1)=(a,b)$, por lo que $(1,0)$ es el elemento unitario.

Sea $(a,b)\neq(0,0)$. Para probar que este elemento tiene inverso multiplicativo, debemos hallar $(x,y)\in\mathbb{C}$ tal que $(a,b)(x,y)=(1,0)$, y por lo tanto $(ax-by, ay+bx)=(1,0)$. Esto nos conduce al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} ax-by&=1\\ bx+ay&=0 \end{aligned}$$

El cual siempre tiene solución, pues por hipótesis $a^2+b^2\neq 0$. Además la solución es

$$x=\frac{a}{(a^2+b^2)}, \qquad y=\frac{-b}{(a^2+b^2)}.$$

Por último, se deja al lector probar la propiedad distributiva (ejercicio 4). □

El siguiente resultado muestra que el campo de los números reales está inmerso en el campo de los números complejos.

Teorema 2. *La función* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *definida por*

$$f(a)=(a,0),$$

es un homomorfismo inyectivo del campo $\mathbb{R}$ *en el campo* $\mathbb{C}$.

Demostración. Si $a,b\in\mathbb{R}$, entonces

$$f(a+b)=(a+b,0)=(a,0)+(b,0)=f(a)+f(b)$$

y

$$f(ab)=(ab,0)=(ab-00, a0+0b)=(a,0)(b,0)=f(a)f(b).$$

Por lo tanto f es un homomomorfismo. Además si $f(a)=f(b)$ entonces $(a,0)=(b,0)$ y por lo tanto $a=b$, es decir, f es inyectiva. □

En virtud del teorema anterior, podemos identificar cada número real a con el número complejo $(a, 0)$. Utilizamos el símbolo i para representar el número complejo $(1, 0)$.[1] Observa que

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Observa también que $(b, 0)(0, 1) = (0, b)$, lo cual justifica escribir $(0, b) = bi$, para todo número real b; estos números son llamados imaginarios puros. Además todo número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir en la forma

$$z = (a, 0) + (0, b) = a + ib.$$

De modo que podemos representar el conjunto de los números complejos como

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Utilizando el hecho de que $i^2 = -1$, la regla de multiplicación de números complejos es fácil de recordar:

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Si $z = a + ib$, diremos que a es la **parte real** de z y b es la **parte imaginaria** de z. Utilizaremos la notación $Re\ z$ para denotar la parte real de un número complejo z, e $Im\ z$, para denotar su parte imaginaria; de esta manera

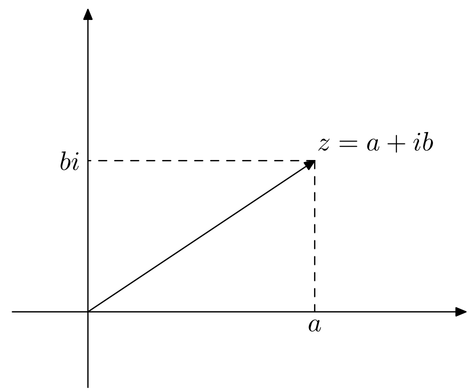
$$z = Re\ z + iIm\ z.$$

El plano complejo

En el siglo XVII, el matemático francés *René Descartes* ideó un método para representar puntos en el plano por medio de parejas ordenadas de números reales. Dibujemos en el plano dos líneas rectas, llamadas ejes, una horizontal y otra vertical. El punto de intersección O de los ejes es llamado el origen. Una unidad de longitud se escoge en cada eje. Una pareja ordenada (a, b) de números reales corresponde al punto P que está a unidades a la derecha del eje vertical si $a \geq 0$, o $-a$ unidades a la izquierda del eje vertical si $a < 0$, y b unidades arriba del eje horizontal si $b \geq 0$, o $-b$ unidades abajo del eje horizontal si $b < 0$.

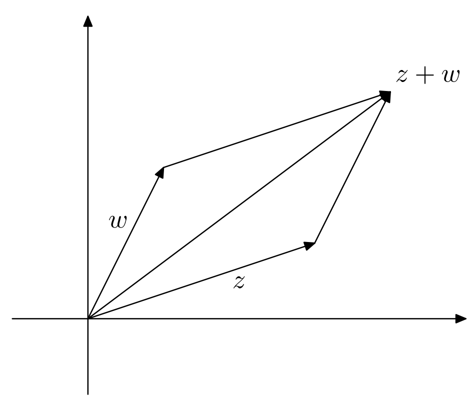
[1] Los ingenieros eléctricos utilizan el símbolo j, pues reservan el símbolo i para denotar la corriente eléctrica.

Todo número complejo $z = a + ib$ se puede representar geométricamente como el punto (a, b) en el plano cartesiano. Alternativamente, un número complejo $z = a + ib$ puede dibujarse como una flecha del origen al punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.



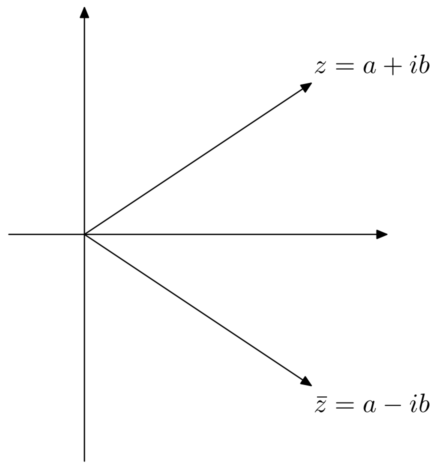
Cuando pensemos en los puntos del plano cartesiano como números complejos, nos referiremos al **plano complejo**. El eje horizontal se llama eje real y el eje vertical se llama eje imaginario.

Si $z, w \in \mathbb{C}$ y transladamos la flecha representando a w de modo que su punto inicial coincida con el punto terminal de z, entonces $z + w$ está representado por la flecha que va del origen al punto terminal de esta flecha.



Conjugado

El **conjugado** de un número complejo $z = a + ib$, es el número $\bar{z} = a - ib$. Geométricamente, el conjugado de z es el número que se obtiene al reflejar z con respecto al eje real.



El siguiente resultado establece algunas propiedades del conjugado de un número complejo.

Teorema 3. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces*
(a) $\overline{\overline{z}} = z$.
(b) $z + \bar{z} = 2Re\ z$.
(c) $z - \bar{z} = 2iIm\ z$.
(d) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(e) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
(f) *Si $w \neq 0$, entonces* $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$.

Demostración. Escribamos $z = a + ib$ y $w = c + id$.
(a) $\overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.
(b) $z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2Re\ z$.
(c) $z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2iIm\ z$.
(d) $\overline{z + w} = (a + c) - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \bar{z} + \bar{w}$.
(e) $\bar{z}\bar{w} = (a - ib)(c - id) = \overline{(ac - bd) - i(bc + bd)} = \overline{zw}$.
(f) Por el inciso anterior, $\bar{w}\overline{(z/w)} = \overline{w(z/w)} = \bar{z}$. De ahí que $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$.
$\square$

El **módulo** de un número complejo $z = a + ib$, es el número real

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

el cual representa la distancia del punto z al origen. El siguiente resultado establece algunas propiedades del módulo de un número complejo.

Teorema 4. *Sean* $z, w \in \mathbb{C}$, *entonces*
(a) $|z| \geq 0$. *Además* $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$.
(b) $z\overline{z} = |z|^2$.
(c) $|\overline{z}| = |z|$.
(d) $|Re\ z| \leq |z|$ *e* $|Im\ z| \leq |z|$.
(e) $|zw| = |z||w|$.
(f) *Si* $w \neq 0$, *entonces* $|z/w| = |z|/|w|$.
(g) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Demostración. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces
(a) $|z| \geq 0$ por definición. Además $|z| = 0 \;\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 = 0$
$\Leftrightarrow\; a = 0$ y $b = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$.
(b) $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = (a^2 + b^2) + i(-ab + ba) = (a^2 + b^2) = |z|^2$.
(c) $|\overline{z}| = |a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.
(d) $|Re\ z| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Análogamente, $|Im\ z| \leq |z|$.
(e) $|zw|^2 = (zw)\overline{zw} = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2$. De ahí que, $|zw| = |z||w|$.
(f) Por el inciso anterior, $|w||z/w| = |w(z/w)| = |z|$. Por lo tanto, $|z/w| = |z|/|w|$.
(g)

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} \\
&= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\
&= |z|^2 + 2Re\ (z\bar{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|z + w| \leq |z| + |w|$. □

La última desigualdad es llamada **desigualdad del triángulo**, pues establece que en cualquier triángulo la suma de las longitudes de dos de los lados deber ser mayor o igual que la longitud del tercer lado.

El hecho de que el producto de un número complejo por su conjugado sea un número real, proporciona un método sencillo para calcular el cociente de dos números complejos:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \left(\frac{a+ib}{c+id}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right)$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

El siguiente teorema establece la existencia de raíces cuadradas de números complejos.

Teorema 5. *Para cada $w \in \mathbb{C}$, existe $z \in \mathbb{C}$, tal que $z^2 = w$.*

Demostración. Supongamos que $z^2 = w$. Por lo tanto $|z|^2 = |w|$, y de ahí que $z\bar{z} = |w|$. Por lo tanto

$$z(z+\bar{z}) = z^2 + z\bar{z} = w + |w|.$$

Ahora bien,

$$(z+\bar{z})^2 = z^2 + 2z\bar{z} + (\bar{z})^2 = w + 2|w| + \bar{w}.$$

Por lo tanto $(z+\bar{z})^2 = 2(Re\ w + |w|)$. De ahí que,

$$\pm\sqrt{2(Re\ w + |w|)}z = w + |w|,$$

donde $\sqrt{\cdot}$ es la raíz cuadrada real, la cual existe, pues $(Re\ w + |w|) \geq 0$.

Si $(Re\ w + |w|) = 0$, entonces $w = -|w|$, y de ahí que $z^2 = -|w|$. Por otra parte, como $w + |w| = 0$, entonces $2zRe\ z = 0$, y por lo tanto $Re\ z = 0$. Es decir, $z = iIm\ z$, y por lo tanto $z^2 = -(Im\ z)^2$. Como también $z^2 = -|w|$, se sigue que $Im\ z = \pm\sqrt{|w|}$, y por lo tanto $z = \pm i\sqrt{|w|}$.

Si $(Re\ w + |w|) > 0$, entonces

$$z = \frac{\pm(w+|w|)}{\sqrt{2(Re\ w + |w|)}}.$$

$\square$

Si $w \in \mathbb{C}$, definimos la **raíz cuadrada** de w como el número

$$\sqrt{w} = \frac{(w + |w|)}{\sqrt{2(Re\ w + |w|)}}, \quad \text{si } Re\ w + |w| > 0,$$

o el número

$$\sqrt{w} = i\sqrt{|w|}, \quad \text{si } Re\ w + |w| = 0.$$

Por lo tanto la ecuación $z^2 = w$ tiene dos soluciones: $z = \pm\sqrt{w}$.

Ejemplo 2. Hallar la raíz cuadrada de $w = -4$.

Solución. $Re\ w + |w| = -4 + 4 = 0$, por lo tanto $\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$. $\triangle$

Ejemplo 3. Hallar la raíz cuadrada de $w = i$.

Solución. $Re\ w + |w| = 0 + 1 = 1$, por lo tanto

$$\sqrt{i} = \frac{i+1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

$\triangle$

Ejemplo 4. Hallar la raíz cuadrada de $w = 3 + 4i$.

Solución. $Re\ w + |w| = 3 + 5 = 8$, por lo tanto

$$\sqrt{3+4i} = \frac{3 + 4i + 5}{\sqrt{16}} = 2 + 2i.$$

$\triangle$

El hecho de que todo número complejo tenga raíz cuadrada, asegura que toda ecuación cuadrática con coeficientes complejos tenga solución en el campo de los números complejos.

Corolario 1. *Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$. Entonces las soluciones de la ecuación cuadrática*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

están dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ejemplo 5. La ecuación

$$x^2 - 2x + 10 = 0$$

no tiene soluciones reales, pero tiene dos soluciones complejas:

$$x = 1 + 3i \quad \text{y} \quad x = 1 - 3i.$$

$\triangle$

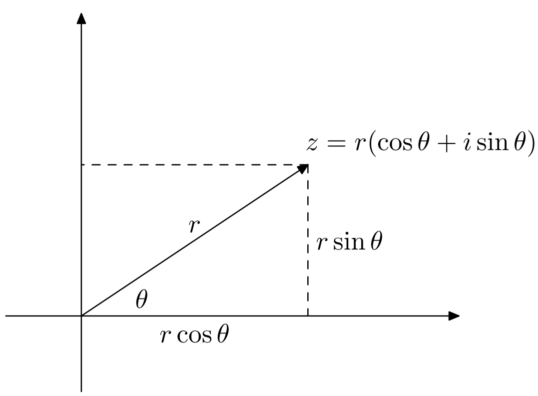
Dado un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, podemos escribir

$$x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta,$$

donde $r = |z|$ y θ es el ángulo entre el eje real positivo y el segmento de recta de 0 a (x, y). De esta manera el número complejo $z = x + iy$ se puede escribir como

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Esta representación es llamada **forma polar** de z.



El ángulo θ es llamado el **argumento** de z y se denota $\theta = arg\ z$. El argumento de un número complejo no es único, pues podemos sustituir θ por $\theta + 2k\pi$, para cualquier entero k.

Ejemplo 6. En cada inciso determinar el argumento del número indicado.
(a) $z = x \in \mathbb{R}$, con $x \geq 0$;
(b) $z = x \in \mathbb{R}$, con $x < 0$;
(c) $z = 1 + i$;
(d) $z = i$.

Solución.
$(a)\quad arg\ z = 0;\qquad (b)\quad arg\ z = \pi;$
$(c)\quad arg\ z = \pi/4;\qquad (d)\quad arg\ z = \pi/2.$ $\triangle$

Teorema 6. *Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces*

$$arg(zw) = arg\ z + arg\ w.$$

Demostración. Escribamos $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ y $w = \rho(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} zw &= r\rho[(\cos\theta\cos\phi - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi) + i(\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + \mathrm{sen}\,\phi\cos\theta) \\ &= r\rho[\cos(\theta+\phi) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\phi)] \end{aligned}$$

De ahí que $|zw| = r\rho = |z||w|$, lo cual ya sabíamos, pero además $arg(zw) = arg\ z + arg\ w$. $\square$

A principios del siglo XVIII, el matemático francés *Abraham de Moivre* obtuvo la siguiente fórmula para calcular potencias de números complejos.

Teorema 7 (Fórmula de De Moivre)**.** *Sea $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta).$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n. Si $n = 1$ el resultado es trivialmente cierto. Supongamos ahora que la fórmula es cierta para n, por lo tanto

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= zz^n = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta) \\ &= r^{n+1}[\cos(n+1)\theta + i\,\mathrm{sen}(n+1)\theta] \end{aligned}$$

Por lo que la fórmula es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejemplo 7. Utilizar el teorema de De Moivre para expresar el número

$$(1+i)^6$$

en la forma $a + ib$.

Solución. $1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/4)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} (1+i)^6 &= (\sqrt{2})^6(\cos 6\pi/4 + i\,\mathrm{sen}\,6\pi/4) \\ &= 8(\cos 3\pi/2 + i\,\mathrm{sen}\,3\pi/2) \\ &= -8i. \end{aligned}$$

$\triangle$

Ejemplo 8. Utilizar el teorema de De Moivre para expresar $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

Solución. Por el teorema del binomio:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta - i\operatorname{sen}^3\theta\\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta) + i(3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta).\end{aligned}$$

Por otra parte, por el teorema de De Moivre

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 = (\cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta).$$

De ahí que,

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\\ \operatorname{sen} 3\theta &= 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta.\end{aligned}$$

△

El siguiente teorema muestra que todo número complejo distinto de cero tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas.

Teorema 8. *Sea $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, con representación polar*

$$w = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la ecuación $z^n = w$ tiene n soluciones las cuales están dadas por

$$z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right],$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Demostración. Escribamos $z = \rho(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)$. Por la fórmula de De Moivre:

$$\rho^n(\cos n\phi + i\operatorname{sen} n\phi) = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

De ahí que

$$\rho^n = r \qquad \text{y} \qquad n\phi = \theta + 2k\pi.$$

por lo tanto

$$\rho = \sqrt[n]{r} \qquad \text{y} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Cada uno de los valores de $k = 0, 1, 2 \ldots, n-1$ da un valor diferente, por otra parte cualesquiera dos enteros cuya diferencia sea un múltiplo de n conduce a la misma solución, por lo tanto hay n soluciones distintas, dadas por:

$$z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right].$$

$\square$

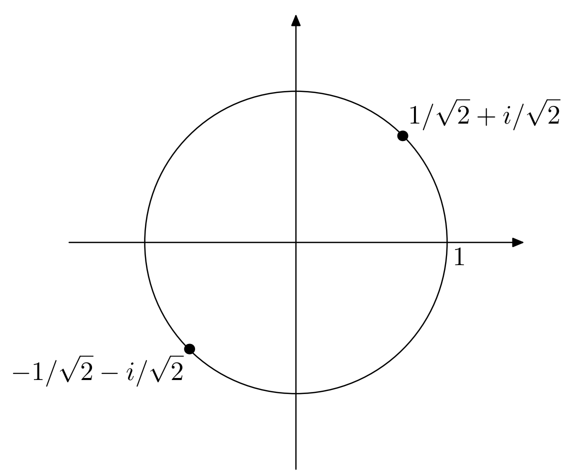
Geométricamente, las n raíces n-ésimas de un número complejo $w = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ se encuentran en un círculo de radio $\sqrt[n]{r}$; la primera raíz tiene argumento θ/n y la diferencia entre los argumentos de dos raíces consecutivas es $2\pi/n$.

Ejemplo 9. Hallar las raíces cuadradas de i.

Solución. $|i| = 1$ y $arg\ i = \pi/2$, por lo tanto las raíces cuadradas son:

$$z_1 = \cos\pi/4 + i \operatorname{sen}\pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = \cos(5\pi/4) + i \operatorname{sen}(5\pi/4) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$



$\triangle$

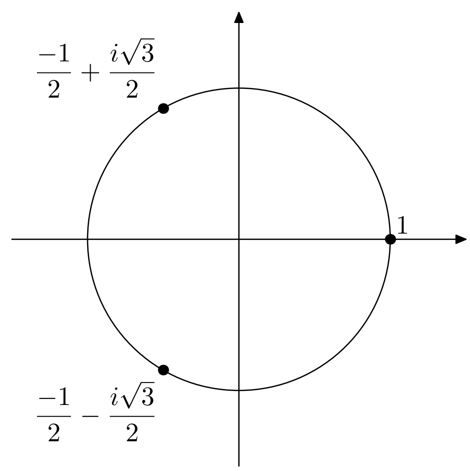
Ejemplo 10. Hallar las raíces cúbicas de 1.

Solución. $|1| = 1$ y $arg\ 1 = 0$, por lo tanto las tres raíces cúbicas son:

$$z_1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$z_2 = \cos(2\pi/3) + i \operatorname{sen}(2\pi/3) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = \cos(4\pi/3) + i \operatorname{sen}(4\pi/3) = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

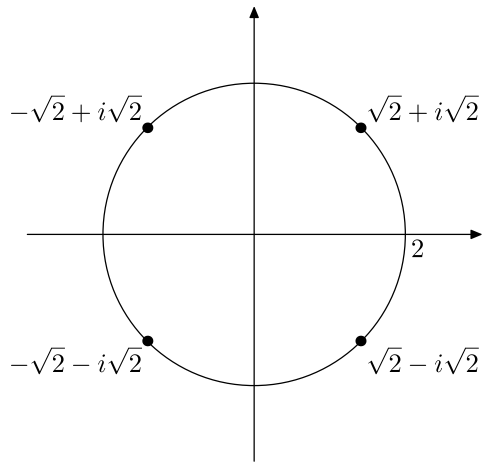


△

Ejemplo 11. Calcular las raíces cuartas de -16.

Solución. $|-16| = 16$ y $arg\ -16 = \pi$, por lo tanto las cuatro raíces cuartas son:

$$z_1 = 2(\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$z_2 = 2(\cos 3\pi/4 + i \operatorname{sen} 3\pi/4) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$z_3 = 2(\cos 5\pi/4 + i \operatorname{sen} 5\pi/4) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$
$$z_4 = 2(\cos 7\pi/4 + i \operatorname{sen} 7\pi/4) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$



△

Ejercicios:

1. Demuestra que la suma de números complejos es asociativa.
2. Demuestra que el producto de números complejos es asociativo.
3. Demuestra que el producto de números complejos es conmutativo.
4. Demuestra la propiedad distributiva de números complejos.
5. Expresa los siguientes números en la forma $a+ib$.

   $(a)\quad \dfrac{3}{i};\qquad (b)\quad \dfrac{2i}{1+3i};$

   $(c)\quad \dfrac{1-4i}{2-i};\qquad (d)\quad (3+5i)^2.$

6. Determina la parte real e imaginaria de los siguientes números, donde $z=x+iy$.

   $(a)\quad \dfrac{1}{z^2};\qquad (b)\quad \dfrac{3}{2z-1};$

   $(c)\quad \dfrac{2z-3}{3z+1};\qquad (d)\quad z^3.$

7. Demuestra que $Re(iz) = -Imz$ y que $Im(iz) = Rez$.

8. Describe geométricamente los conjuntos:

   $(a) \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \ |Imz| \leq 1\}; \qquad (b) \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \ Im(iz) = 1\};$

   $(c) \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - i| \geq 1\}; \qquad (d) \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z^2| = 4\}.$

9. Demuestra que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

   $$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

   ¿Cuál es la interpretación geométrica de esta identidad?

10. Demuestra que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

    $$|1 - z\bar{w}|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2).$$

11. Supón que $|z| = 1$ y que $\overline{z}w \neq 1$, demuestra que

    $$\left| \frac{z - w}{1 - \overline{z}w} \right| = 1.$$

12. Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$. Muestra que las raíces cuadradas de $-a$ son

    $$\pm\sqrt{a}i.$$

13. Calcula la raíz cuadrada de $-15 - 8i$.

14. Resuelve la ecuación cuadrática: $x^2 - (3 + 2i)x + (5 + 5i) = 0$.

15. Utiliza el teorema de De Moivre para expresar el número $(-1 + i)^{12}$ en la forma $a + ib$.

16. Utiliza el teorema de De Moivre para expresar el número $(1 - \sqrt{3}i)^5$ en la forma $a + ib$.

17. Utiliza el teorema de De Moivre para expresar $\cos 4\theta$ y $\operatorname{sen} 4\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

18. Utiliza el teorema de De Moivre para expresar $\cos 5\theta$ y $\operatorname{sen} 5\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

19. Determina las raíces cúbicas de $-8i$ y represéntalas geométricamente.

20. Calcula las raíces cúbicas de $64i$ y represéntalas geométricamente.

21. Encuentra las raíces cuartas de $-1-\sqrt{3}i$ y represéntalas geométricamente.

22. Determina las raíces cuartas de 16 y represéntalas geométricamente.

23. Encuentra las raíces sextas de 1 y represéntalas geométricamente.

24. Calcula las raíces sextas de -1 y represéntalas geométricamente.

25. Demuestra que no es posible definir un orden en $\mathbb{C}$ de modo que $\mathbb{C}$ sea un campo ordenado.

26. Sea
$$D = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$
Demuestra que D es un dominio entero.

    Los elementos de D son llamados ***enteros Gaussianos****, pues fueron definidos por Gauss en 1830.*

27. Sea K el conjunto cuyos elementos son de la forma
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
con $a, b \in \mathbb{R}$.

    a) Demuestra que K es un subanillo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
    b) Demuestra que K es un campo.
    c) Demuestra que K es isomorfo al campo de los números complejos.

28. Demuestra que si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces
$$z^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i\operatorname{sen}(-n\theta)].$$

29. Sea ω una raíz n-ésima de 1, $\omega \neq 1$. Demuestra que

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{n-1} = 0.$$

30. Para cada $z = x + iy$ se define la función **exponencial compleja** como

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Demuestra que, si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $e^z e^w = e^{z+w}$.

La exponencial compleja fue introducida por Euler en el siglo XVIII, para extender la exponencial real al plano complejo, observa que

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Esta fórmula es considerada una de las más bonitas en matemáticas, pues involucra los cinco números más importantes.

31. Sea $A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, con la suma y el producto definidos por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - \bar{b}d, \bar{a}d + bc).$$

Demuestra que $(A, +, \ \cdot\ )$ es un anillo no conmutativo con elemento unitario, en el que cada elemento distinto de cero es unidad.

Los elementos de A son llamado ***cuaternios*** *y fueron estudiados por Hamilton en el siglo XIX.*