Alfaomega Grupo Editor

Determinantes

Ramón Espinoza Armenta

Apoyo en la web

AVC Apoyo Virtual para el Conocimiento

Sea $A \in M_n(K)$, donde $n \geq 2$. El *ij*-ésimo **menor** de *A* es la matriz $\tilde{A}_{ij}$, obtenida a partir de *A* eliminando el renglón *i* y la columna *j*.

Ejemplo 1.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Hallar $\tilde{A}_{23}$.

Solución.

$$\tilde{A}_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Sea $A \in M_n(K)$. El determinante de *A*, denotado de*t* (*A*), se define recursivamente de la siguiente manera:

$$\det(A) = a_{11} \qquad si \quad n = 1;$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\tilde{A}_{1j}) \qquad si \quad n \geq 2.$$

El determinante de A también se denota $|A|$. Observa que det(A) es un escalar. El ij-ésimo **cofactor** de A es el número:

$$(-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij}).$$

La expresión

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(\tilde{A}_{ij})$$

se conoce como **desarrollo por cofactores** a lo largo del primer renglón.

Ejemplo 2.

Sea

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces det(A) = ad - bc.

Ejemplo 3.

Sea

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3) - (-1) - 2(-2) = -4.$$

Veremos a continuación algunas propiedades del determinante.

Teorema 1.

Sea $A \in M_n(K)$. *Si B es la matriz de n x n obtenida a partir de A, multiplicando el renglón i por* $\lambda \in K$, *entonces* $\det(B) = \lambda \det(A)$.

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces $A = (a_{11})$ y $B = (\lambda a_{11})$. Por lo tanto $\det(B) = \lambda a_{11} = \lambda \det(A)$.

Supongamos el resultado cierto para algún entero positivo n. Sea A una matriz de $(n + 1)$ x $(n + 1)$, y sea B la matriz obtenida a partir de A, multiplicando el renglón i por el escalar λ.

Si $i = 1$, entonces $\tilde{B}_{ij} = \tilde{A}_{ij}$, para toda $j \geq 1$, por lo tanto

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det(\tilde{B}_{1j})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \left(\lambda\, a_{1j}\right) \det(\tilde{A}_{1j})$$

$$= \lambda \det(A)$$

Si $i > 1$, entonces, $b1j = a1j$, para cada $j \geq 1$, además la matriz $\tilde{B}_{ij}$ se obtiene a partir de la matriz $\tilde{A}_{ij}$ multiplicando el renglón i-1 por el escalar λ, de modo que, por hipótesis de inducción $\det(\tilde{B}_{1j}) = \lambda \det(\tilde{A}_{1j})$. De ahí que

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det(\tilde{B}_{1j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \lambda \det(\tilde{A}_{1j}) \\
&= \lambda \det(A)
\end{aligned}
$$

Corolario 1.

Sea $A \in M_n(K)$ *y supongamos que A tiene un renglón que consta solamente de ceros, entonces* $\det(A) = 0$.

Ejemplo 4.

$$
\begin{vmatrix} 3 & 7 & -4 & 9 \\ 2 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,
$$

porque el tercer renglón consta solamente de ceros.

Teorema 2.

Sea $A \in M_n(K)$ *y supongamos que el renglón i de A es igual a la suma de dos vectores renglón, es decir, Ai = Bi + Ci. Entonces* det(*A*) =det(*B*) + det(*C*)*, donde B y C se obtienen a partir de A sustituyendo el renglón Ai por los renglones Bi y Ci, respectivamente.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces A, B y C son escalares, y $A = B + C$, por lo que el resultado es trivialmente cierto.

Supongamos el resultado cierto para algún entero positivo n. Sea A una matriz de $(n+1) \times (n+1)$, y supongamos que $Ai = Bi+Ci$. Sean B y C las matrices obtenidas a partir de A sustituyendo el renglón Ai por los renglones Bi y Ci, respectivamente.

Si $i = 1$, entonces $\tilde{B}_{ij} = \tilde{C}_{ij} = \tilde{A}_{ij}$, para toda $j \geq 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\det(B+C) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}(b_{1j}+c_{1j})\det(\tilde{A}_{1j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j}\det(\tilde{A}_{1j}) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} c_{1j}\det(\tilde{A}_{1j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j}\det(\tilde{B}_{1j}) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} c_{1j}\det(\tilde{C}_{1j}) \\
&= \det(B) + \det(C).
\end{aligned}$$

Si $i > 1$, entonces, $a1j = b1j = c1j$, para cada $j \geq 1$, además el renglón i-1 de la matriz $\tilde{A}_{ij}$ es la suma del renglón i - 1 de $\tilde{B}_{ij}$ y del renglón i -1 de $\tilde{C}_{ij}$, por lo tanto, por hipótesis de inducción

$$\det(\tilde{A}_{ij}) = \det(\tilde{B}_{ij}) + \det(\tilde{C}_{ij}).$$

De ahí que

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(\tilde{A}_{1j})\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}(\det(\tilde{B}_{1j})+\det(\tilde{C}_{1j}))\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}b_{1j}\det(\tilde{B}_{1j})+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}c_{1j}\det(\tilde{C}_{1j})\\ &= \det(B)+\det(C).\end{aligned}$$

Utilizaremos la notación *ek* para denotar un renglón que tiene un uno en la posición *k* y ceros en las demás posiciones.

Lema 1.

Sea $B \in M_n(K)$***, donde*** $n \geq 2$***. Si el renglón i de B es igual a ek para algún k, entonces*** $\det(B) = (-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})$**.**

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre *n*. Si *n* = 2 el resultado se puede verificar fácilmente, analizando los casos posibles. Supongamos que el resultado es cierto para algún $n \geq 2$, y sea $B \in M_{n+1}(K)$, tal que el renglón *i* de *B* es igual a *ek*.

Si *i* = 1, el resultado se sigue inmediatamente de la definición de determinante. Si *j* > 1, entonces el renglón *i* - 1 de la matriz $\tilde{B}_{ij}$ es el vector

$$\begin{cases} e_{k-1} & si \quad j<k,\\ 0 & si \quad j=k,\\ e_k & si \quad j>k. \end{cases}$$

Por lo tanto, por hipótesis de inducción,

$$\det(B_{ij})\begin{cases}(-1)^{(i+1)+(k-1)}\det(C_{ij}) & si \quad j<k,\\ (-1)^{(i+1)+k}\det(C_{ij}) & si \quad j>k.\end{cases}$$

donde, para cada $j \neq k$, *Cij* es la matriz de (n - 2) x (n - 2) obtenida a partir de B eliminando los renglones 1 e i, y las columnas j y k. Además, por el corolario 1, $\det(\tilde{B}_{ij})=0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}b_{1j}\det(\tilde{B}_{1j})\\ &= \sum_{j<k}(-1)^{1+j}b_{1j}(-1)^{(1+j)+(k-1)}\det(C_{ij})\\ &+\sum_{j>k}(-1)^{1+j}b_{1j}(-1)^{(i+j)+k}\det(c_{1j})\\ &= (-1)^{i+k}\left[\sum_{j<k}(-1)^{1+j}b_{1j}\det(C_{ij})+\sum_{j>k}(-1)^{1+(j-1)}b_{1j}\det(C_{ij})\right]\\ &= (-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})\end{aligned}$$

El siguiente teorema muestra que podemos calcular el determinante de una matriz, por desarrollo por cofactores a lo largo de cualquier renglón.

Teorema 3.

Si $A \in M_n(K)$, *entonces para cada* $1 \le i \le n$,

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(\tilde{A}_{ij}).$$

Demostración.

Por definición, el resultado es cierto para $i = 1$. Sea $i > 1$.

Podemos escribir el renglón i de A como $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$. Para cada $1 \leq j \leq n$, sea Bj la matriz obtenida a partir de A reemplazando el renglón i de A por ej . Entonces, por los teoremas 1, 2, y el lema 1, tenemos que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det(B_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}).$$

Ejemplo 5.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando det(A) por cofactores a lo largo del segundo renglón, obtenemos

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(2) - 8 = -4,$$

que coincide con el resultado obtenido en el ejemplo 3.

Ejemplo 6

. Calcular el determinante de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. Calculando el determinante a lo largo del tercer renglón, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-5)(-2) = 10.$$

Veremos ahora algunos resultados que facilitan el cálculo de determinantes.

Teorema 4.

Sean $A, B \in M_n(K)$. *Si B se obtiene a partir de A intercambiando dos renglones, entonces* $\det(B) = -\det(A)$.

Demostración.

Caso 1. Supongamos que los renglones que se intercambian son consecutivos. Sean i e i+1 dichos renglones. Observemos que $\tilde{B}_{(i+1)j} = \tilde{A}_{ij}$, por lo que, calculando el determinante de B a partir del renglón i + 1, obtenemos

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(i+1)+j} a_{(i+1)j} \tilde{B}_{(i+1)j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(i+1)+j} a_{(i+1)j} \tilde{A}_{ij} \\ &= -\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{(i+1)j} \tilde{A}_{ij} \\ &= -\det(A)\end{aligned}$$

Caso 2. Supongamos que se intercambian los renglones i y k, con $k > i+1$.

Observemos que se necesitan k - i intercambios de renglones consecutivos para que el renglón k esté en la posición i. En ese momento el renglón i está en la posición i + 1, por lo que se necesitan k - (i + 1) intercambios de renglones consecutivos para que el renglón i esté en la posición j. Por lo tanto hay un total de $(k - i) + (k - (i + 1)) = 2(k - i) - 1$ intercambios de renglones consecutivos. De ahí que

$$\det(B) = (-1)^{2(k-i)-1} \det(A) = -\det(A).$$

Corolario 2.

Sea $A \in M_n(K)$). *Si A tiene dos renglones iguales, entonces* det(*A*) = 0.

Demostración.

Supongamos que el renglón *i* es igual al renglón *j*. Sea *B* la matriz que se obtiene a partir de *A* intercambiando esos renglones. Por lo tanto, por el teorema anterior, det(*B*) = -det(*A*). Por otra parte, como los renglones que se intercambiaron son idénticos, entonces *B* = *A*, y por lo tanto det(*B*) = det(*A*). De ahí que det(*A*) = -det(*A*), lo cual implica que det(*A*) = 0.

Ejemplo 7.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

porque el tercer renglón es igual al primer renglón.

Corolario 3.

Sea $A \in M_n(K)$. *Si un renglón de A es igual a otro renglón multiplicado por un escalar, entonces* det(*A*) = 0.

Demostración.

Supongamos que el renglón j es igual al renglón i multiplicado por c. Sea B la matriz que se obtiene a partir de A sustituyendo el renglón j por el renglón i. Por lo tanto, por le corolario anterior, $\det(B) = 0$. Por otra parte, por el teorema 1, $\det(A) = c \det(B)$, de ahí que $\det(A) = 0$.

Ejemplo 8.

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

porque el cuarto renglón es un múltiplo escalar del segundo renglón.

Teorema 5.

Sean $A, B \in M_n(K)$. *Si* B *se obtiene a partir de* A *añadiendo un múltiplo de un renglón de* A *a otro renglón, entonces* $\det(B) = \det(A)$.

Demostración. Supongamos que B se obtiene a partir de A añadiendo al renglón j el renglón i multiplicado por c. Sean $A1,\dots,An$ los renglones de A, y sean $B1,\dots,Bn$ los renglones de B. Sea C la matriz que se obtiene a partir de A reemplazando el renglón Aj por el renglón cAi, y sean $C1,\dots,Cn$ los renglones de C. Por lo tanto A y C difieren de la matriz B únicamente en el renglón j. Además $Bj = Aj + Cj$, de ahí que, por el teorema 2, $\det(B) = \det(A) + \det(C)$. Por otra parte, por el corolario anterior, $\det(C) = 0$, por lo tanto $\det(B) = \det(A)$.

El siguiente teorema establece que si una matriz es triangular superior, entonces su determinante es igual al producto de los elementos en la diagonal principal.

Teorema 6.

Si $A \in M_n(K)$ *es triangular superior, entonces*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n. Si n = 1 el resultado es trivialmente cierto. Supongamos ahora que el resultado es cierto para algún $n \geq 1$, y sea A una matriz triangular superior de orden n+1. Calculando el determinante por cofactores a lo largo del último renglón, obtenemos

$$\det(A) = a_{(n+1)(n+1)} \det(\tilde{A}_{(n+1)(n+1)}).$$

Como $\tilde{A}_{(n+1)(n+1)}$ es una matriz triangular superior de orden n, se sigue de la hipótesis de inducción que $(\tilde{A}_{(n+1)(n+1)}) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, y por lo tanto

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}a_{(n+1)(n+1)},$$

lo cual muestra que el resultado es cierto para cualquier entero positivo n.

Ejemplo 9.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4(2)(1)(3) = 24$$

Veremos ahora un método para calcular determinantes, que reduce sustancialmente el número de operaciones que se requieren al calcular determinantes mediante desarrollo por cofactores. La idea básica es realizar operaciones elementales en los renglones de la matriz, para transformarla en una matriz triangular superior. El siguiente ejemplo ilustra el método.

Ejemplo 10.

Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -37 \end{vmatrix}$$

$$= -2(1)(1)(-37) = 74.$$

Veremos a continuación algunas propiedades adicionales del determinante. Pero antes necesitamos dos lemas, cuya demostración se deja al lector (ejercicios 5 y 6).

Lema 2.

Si $E \in M_n(K)$ *es una matriz elemental, entonces* $\det(E) \neq 0$.

Lema 3.

Sean $A, E \in M_n(K)$. *Si E es una matriz elemental, entonces* det(*EA*) = det(*E*) det(*A*).

Teorema 7.

Sea $A \in M_n(K)$, *entonces A es invertible si y sólo si* $\det(A) \neq 0$.

Demostración. Supongamos que *A* es invertible. Por lo tanto existen matrices elementales *E*1,…,*Ek*, tales que

$$E_k \cdots E_1 A = I_n.$$

Aplicando *k* veces el lema anterior, tenemos que

$$\det(E_k) \cdots \det(E_1) \det(A) = \det(I_n) = 1.$$

Como el determinante de cada matriz elemental es distinto de cero (lema 2), concluimos que $\det(A) \neq 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\det(A) \neq 0$. Por el teorema ??, podemos expresar *A* en la forma $A = F_1 \cdots F_k T$, donde *F*1,…, *Fk*, son matrices elementales y *T* es triangular superior. Si *T* tiene un renglón que consta solamente de ceros, entonces det(*T*) = 0. Aplicando *k* veces el lema anterior, tenemos que

$$\det(A) = \det(F_1) \cdots \det(F_k) \det(T) = 0,$$

lo cual no es posible, porque el determinante de cada matriz elemental es distinto de cero, y por hipótesis, $\det(A) \neq 0$. Por lo tanto *T* es una matriz cuadrada, en forma escalonada reducida, cuyos renglones no constan solamente de ceros, es decir, *T* = *In*, y de ahí que, por el teorema ??, *A* es invertible.

Teorema 8.

Sean $A, B \in M_n(K)$, *entonces* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demostración.

Caso 1. Si $\det(A) = 0$ y $\det(B) = 0$, entonces por el teorema anterior, *B* no es invertible, por lo tanto, por el teorema ??, existe un vector columna $x \neq 0$, tal que $Bx = 0$. De ahí que,

$$(AB)x = A(Bx) = A0 = 0.$$

Por lo tanto *AB* no es invertible, por lo que, por el teorema anterior $\det(AB) = 0$. En conclusión, $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$.

Caso 2. Si $\det(A) = 0$ y $\det(B) \neq 0$, entonces *A* no es invertible, por lo tanto, por el teorema ??, existe un vector columna $x \neq 0$, tal que $Ax = 0$.

Por otra parte, por el teorema anterior, *B* es invertible. Sea $y = B^{-1}x$. Por lo tanto $By = x$. Observemos además que $y \neq 0$, y

$$(AB)y = A(By) = Ax = 0.$$

Por lo tanto *AB* no es invertible, y de ahí que $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$.

Caso 3. Si $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible. Por lo tanto existen matrices elementales $E1,\ldots,Ek$, tales que $E_k \cdots E_1 A = I_n$, y de ahí que $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$. Por lo tanto, aplicando repetidamente el lema 3, tenemos que

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} B) \\ &= \det(E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}) \det(B) \\ &= \det(E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}) \det(B) \\ &= \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

Teorema 9.

Sea $A \in M_n(K)$. *Si A es invertible, entonces*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Demostración. Por el teorema anterior,

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Por otra parte,

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

Por lo que, $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Ahora bien, como A es invertible, se sigue del teorema 7 que $\det(A) \neq 0$. Por lo tanto

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

El siguiente lema, cuya demostración se deja al lector (ejercicio 7), nos servirá para probar que el determinante de una matriz coincide con el determinante de la matriz transpuesta.

Lema 4.

Si E es una matriz elemental, entonces $\det(E) = \det(E^t)$.

Teorema 10.

Sea $A \in M_n(K)$. *Entonces* $\det(A^t)\det(A)$.

Demostración.

Por el teorema ??, podemos expresar *A* en la forma $A = F_1 \cdots F_k T$, donde *F*1,..., *Fk*, son matrices elementales y *T* es triangular superior.

Caso 1. Si *T* tiene un renglón que consta solamente de ceros, entonces det(*T*) = 0, y por lo tanto det(*A*) = 0. Si A^t fuera invertible, entonces $(A^t)^t = A$ también sería invertible, lo cual no es posible, por lo tanto A^t no es invertible, y de ahí que $\det(A^t) = 0 = \det(A)$.

Caso 2. Si todos los renglones de *T* son distintos de cero, entonces *T* = *In*, por lo tanto $A = F_1 \cdots F_k$, de ahí que, por el lema anterior, y el teorema 8,

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \det(F_k^t)\cdots\det(F_1^t)\\ &= \det(F_k)\cdots\det(F_1)\\ &= \det(F_1)\cdots\det(F_k)\\ &= \det(A).\end{aligned}$$

El siguiente corolario establece que podemos calcular el determinante de una matriz, desarrollando por cofactores a lo largo de cualquier columna.

Teorema 11.

Si $A \in M_n(K)$, *entonces para cada* $1 \le j \le n$,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}).$$

Demostración.

Calculando $\det(A^t)$ por cofactores a lo largo del renglón *j* obtenemos:

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a^t_{ji} \det(\tilde{A}^t_{ji}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}).\end{aligned}$$

Como $\det(A) = \det(A^t)$, se sigue que $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$.

En 1750 el matemático suizo *Gabriel Cramer* publicó el siguiente teorema.

Teorema 12 (Regla de Cramer).

Sea Ax = b la forma matricial de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$.

Si $\det(A) \neq 0$, *el sistema tiene solución única, y para cada k* = 1,…, *n,*

$$x_k = \frac{\det(M_k)}{\det(A)},$$

donde Mk es la matriz de n x *n obtenida a partir de A reemplazando la columna k de A por el vector b.*

Demostración.

Si $\det(A) \neq 0$, entonces *A* es invertible, por lo tanto, por el teorema ??, el sistema tiene solución única. Sea $x = (x_1, ..., x_n)^t$ tal solución.

Para cada $1 \leq k \leq n$, sea *Bk* la matriz obtenida a partir de *In* reemplazando la columna *k* por el vector *x*. Observemos que, para cada *k*, *ABk* es una matriz de *n* x *n*. Además, si $j \neq k$, entonces la entrada *ij* de *ABk* es *aij* . Por otra parte, la entrada *ik* de *ABk* es

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n ,$$

pero por hipótesis, este número es igual a *bi*. En conclusión, *ABk* = *Mk*.

Calculando det(*Bk*) por cofactores a lo largo del renglón *k*, obtenemos

$$\det(Bk) = xk \det(In\text{-}1) = xk.$$

Por lo tanto,

$$\det(Mk) = \det(ABk) = \det(A)\det(Bk) = \det(A)xk,$$

De ahí que

$$x_k = \frac{\det(M_k)}{\det(A)}.$$

Ejemplo 11.

Utilizar la regla de Cramer para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$4x1 + 2x2 = 7$$
$$-2x1 + 3x2 = 5$$

Solución. La matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = 16 \neq 0$, el sistema tiene solución única. Además, por la regla de Cramer,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{16} = \frac{11}{16} \qquad y \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{16} = \frac{17}{8}.$$

Ejercicios

1. Calcula el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

a partir de la definición de determinante.

2. Calcula el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

a partir de la definición de determinante.

3. Encuentra el valor de

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix},$$

sin hacer cálculos.

4. Encuentra el valor de

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 6 & -3 & 12 \end{vmatrix},$$

sin hacer cálculos.

5. Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

6. Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & -9 \\ 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Calcula el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$

reduciendo la matriz a la forma triangular superior.

8. Calcula el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

reduciendo la matriz a la forma triangular superior.

9. Sea $A \in M_n(K)$ y sea $\lambda \in K$. Demuestra que $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Demuestra que det(In) = 1.

Propiedades del determinante

1. Utiliza la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$2x1 + 3x2 = 4$$
$$3x1 + 5x2 = 8$$

2. Utiliza la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$4x1 - x2 = 3$$
$$5x1 + 2x2 = 1$$

3. Utiliza la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$x1 - 2x2 + x3 = 4$$
$$2x1 + x2 + 2x3 = 1$$
$$x1 + 8x2 + x3 = 5$$

4. Utiliza la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$2x1 + x2 + x3 = 1$$
$$4x1 + 3x2 + 2x3 = 2$$
$$2x1 - x2 - 3x3 = 3$$

5. Demuestra que si $E \in M_n(K)$ es una matriz elemental, entonces $\det(E) \neq 0$.

6. Sean $A, E \in M_n(K)$. Demuestra que si E es una matriz elemental, entonces $\det(EA) = \det(E)\det(A)$.

7. Demuestra que si E es una matriz elemental, entonces $\det(E) = \det(E^t)$.

8. Muestra dos matrices $A, B \in M_2(K)$, tales que $\det(A) \neq 0$ y $\det(B) \neq 0$, pero det(A + B) = 0.

9. Una matriz A se dice que es **antisimétrica**, si $A^t = -A$. Demuestra que si $A \in M_n(K)$ es antisimétrica, entonces $\det(A) = (-1)^n \det(A)$.

10. Demuestra que si $A \in M_n(K)$ es antisimétrica y n es impar, entonces det(A) = 0.

11. Una matriz A se dice que es **ortogonal**, si A es invertible y $A^{-1} = A^t$. Demuestra que si A es ortogonal, entonces $\det(A) = \pm 1$.
12. Una matriz $A \in M_n(K)$ se dice que es **idempotente**, si $A^2 = A$. Si A es idempotente, ¿cuáles son los posibles valores de det(A)?

13. El **determinante de Vandermonde** de n x n se define como:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Demuestra que

$$V_n = \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n} (a_j - a_i).$$