Extensión del principio de inclusión-exclusión

por

Ramón Espinosa Armenta

Veremos a continuación una extensión del principio de inducción matemática, pero antes necesitamos probar el siguiente lema.

Lema 1.

$$\binom{m+j}{m+k}\binom{m+k}{k} = \binom{m+j}{m}\binom{j}{k}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\binom{m+j}{m+k}\binom{m+k}{k} &= \frac{(m+j)!}{(m+k)!\,(j-k)!}\frac{(m+k)!}{k!\,m!}\\[2ex] &= \frac{(m+j)!}{m!\,k!\,(j-k)!}\\[2ex] &= \frac{(m+j)!}{m!\,j!}\frac{j!}{k!\,(j-k)!}\\[2ex] &= \binom{m+j}{m}\binom{j}{k}.\end{aligned}$$

□

Teorema 1. *Sea A un conjunto finito no vacío, y sean $p_1, p_2, \ldots, p_r$, r propiedades que pueden tener o no los elementos de A. Para cada $i = 1, \ldots, r$ sea*

$$A_i = \{x \in A \mid x \text{ tiene la propiedad } p_i\}.$$

Sea E_m el número de objetos teniendo exactamente m propiedades, $m \leq r$. Para cada $t = 1, 2 \ldots, r$, definamos

$$S_t = \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_t}|$$

donde la suma esta tomada sobre todas las elecciones de t propiedades distintas $p_{i_1}, \ldots, p_{i_t}$. Escribamos también $S_0 = A$, entonces

$$E_m = \sum_{k=0}^{r-m} (-1)^k \binom{m+k}{k} S_{m+k}.$$

Demostración. Si un objeto tiene menos de m propiedades, entonces no es contado ni en el lado izquierdo ni en el lado derecho de la ecuación. Si un objeto tiene exactamente m propiedades entonces es contado exactamente una vez en el lado derecho (al calcular S_m). Por último, si un objeto tiene $m + j$ propiedades entonces es contado

$$\binom{m+j}{m}$$

veces al calcular S_m, es contado

$$\binom{m+j}{m+1}$$

veces al calcular S_{m+1} y en general, es contado

$$\binom{m+j}{m+i}$$

veces al calcular S_{m+i}, $i \leq j$. Por lo tanto el objeto es contado en total

$$\sum_{k=0}^{j} \binom{m+j}{m+k} \binom{m+k}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{j} \binom{m+j}{m} \binom{j}{k} (-1)^k$$

$$= \binom{m+j}{m} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^k$$

$$= \binom{m+j}{m} (1 + (-1))^j = 0$$

veces. □

Observa que si hacemos $m = 0$ en el teorema anterior, obtenemos el principio de inclusión-exclusión.

Ejemplo 1. ¿Cuántas permutaciones de un conjunto con n elementos dejan exactamente un elemento en su posición original?

Solución. En este caso

$$S_t = \binom{n}{t}(n-t)!$$

Por lo que

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{k+1}{k} S_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{k+1}{k}\binom{n}{k+1}(n-k-1)! \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{k!} \\ &= nD_{n-1}. \end{aligned}$$

$\triangle$

Ejercicios:

1. Un grupo de n personas intercambia regalos al azar. Muestra que si n es suficientemente grande, entonces la probabilidad de que a exactamente una persona le toque su propio regalo es prácticamente igual a la probabilidad de que a ninguna persona le toque su propio regalo.

2. ¿Cuántas permutaciones de un conjunto con n elementos dejan exactamente m elementos en su posición original?