Coloración

Gregorio Hernández Peñalver

Matemática Discreta

Unos cuantos problemas

• Asignación de frecuencias de radio

G=(V, A) V={emisoras}, dos emisoras son adyacentes si sus emisiones se solapan

Se quiere partir V en conjuntos V_i de modo que los elementos de cada V_i no sean adyacentes.

Y se intenta que el número de conjuntos sea el menor posible

Unos cuantos problemas

• Almacenamiento de productos peligrosos

G=(V, A) V={productos}, dos productos son adyacentes si no pueden almacenarse juntos

Se quiere partir V en conjuntos V_i de modo que los elementos de cada V_i no sean adyacentes. Y se intenta que el número de conjuntos sea el menor posible

Unos cuantos problemas

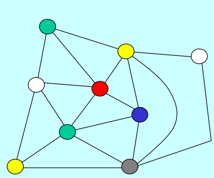
• Localización de registros en un programa

G=(V, A) V={variables}, dos variables son adyacentes si se usan al mismo tiempo

Se quiere partir V en conjuntos V_i de modo que los elementos de cada V_i no sean adyacentes. Y se intenta que el número de conjuntos sea el menor posible

Coloración de vértices en un grafo

Vértices adyacentes reciben diferente color



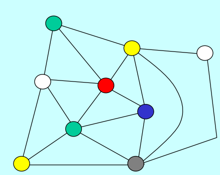
Una 6-coloración de G

Los vértices del mismo color forman una **clase de color**

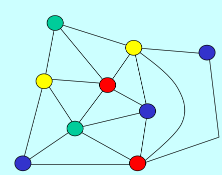
$$V= V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5 \cup V_6$$

V_1={amarillos}, V_2={verdes}, V_3={rojos}, …

Coloración de vértices en un grafo



Una 6-coloración de G



Una 4-coloración de G

No hay 3-coloración de G

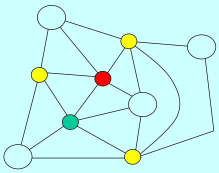
El nº cromático de G es 4

$\chi(G) = 4$

Conceptos relacionados con la coloración de vértices

• Conjunto **independiente** de vértices

$S \subset V$ es independiente si no hay vértices adyacentes



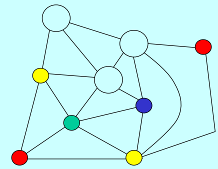
S ={ }

S'={ }

Nº de independencia de G $\beta(G) = 4$

• Clique o camarilla en un grafo

$S \subset V$ es clique si dos vértices cualesquiera de S son adyacentes



S={ }

Nº de clique de G $\omega(G) = 3$

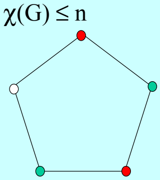
Propiedades del nº cromático

• Si un grafo tiene n vértices entonces $\chi(G) \leq n$

• $\chi(K_n) = n$

• $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow$ G es un grafo bipartido

• $\chi(G) \geq 3 \Leftrightarrow$ G tiene ciclo impar

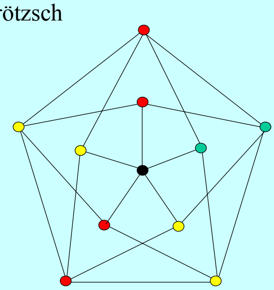


• Si G contiene a K_n como subgrafo, entonces $\chi(G) \geq n$.

• Los vértices de una clique necesitan diferentes colores, luego $\chi(G) \geq \omega(G)$

• Vértices independientes pueden recibir el mismo color, luego $\chi(G) \geq n/\beta(G)$

Grafo de Grötzsch



Teorema (Mycielski, 1955)

Para todo entero positivo c, existe un grafo sin triángulos y de nº cromático c

Algoritmos de coloración

Heurísticas:

• Los vértices de grado alto son "difíciles" de colorear

• Los vértices con los mismos vecinos deben colorearse al mismo tiempo

• Si es posible, se debe asignar a muchos vértices el mismo color

Tipos:

– Algoritmos secuenciales

– Algoritmos que buscan conjuntos independientes

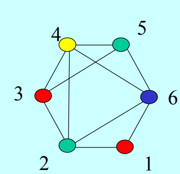
Algoritmo secuencial básico

Entrada: Una ordenación de los vértices de un grafo G

Salida: Una coloración de los vértices

Paso 1: Asignar el color 1 al vértice v_1

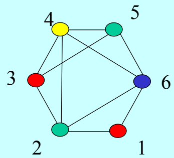
Paso 2: Si hemos coloreado $v_1, v_2, \ldots, v_k$ con j colores, asignamos a v_{k+1} el color t, donde $t \leq j+1$ es el mínimo color permitido para v_{k+1}, según los colores ya asignados a sus vecinos.



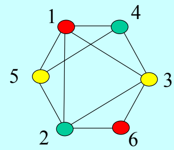
Colores ={ }

“Primero el de mayor grado”

En esta variante, debida a Welsh y Powell, se ordenan los vértices inicialmente de acuerdo a sus grados. Es decir, ordenamos de forma que $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \ldots \geq d(v_n)$.



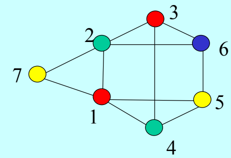
Una 4-coloración con el algoritmo básico



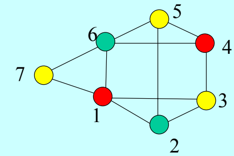
Una 3-coloración con la variante

“El de menor grado el último”

Esta variante se debe a Marble, Matula e Isaacson. Se ordenan los vértices en orden inverso. Primero se elige v_n como el vértice de menor grado, luego se elige v_{n-1} como el vértice de menor grado en $G-\{v_n\}$, y así se continúa recursivamente, examinando los vértices de menor grado y eliminándolos del grafo.



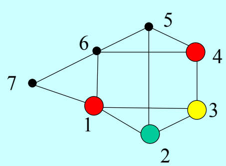
Welsh-Powell
4-coloración



Matula-Marble-Isaacson
3-coloración

Algoritmo de Brelaz

Grado de color o **grado de saturación** de un vértice v es el nº de colores usados en los vecinos de v.

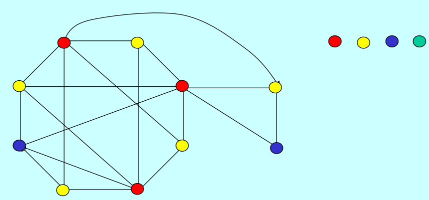


gs(5)=2

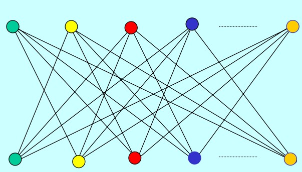
gs(6)=1

El orden en que iremos coloreando vértices depende del grado y del grado de saturación

Paso 1: Ordenar los vértices en orden decreciente de grados
Paso 2: Coloreamos un vértice de grado máximo con el color 1
Paso 3: Seleccionamos un vértice, aún sin colorear, con grado de color máximo. Si hay varios, elegimos el de grado máximo.
Paso 4: Colorear el vértice seleccionado en el paso 3 con el menor color posible.
Paso 5: Si todos los vértices se han coloreado, FIN. En caso contrario, volver al paso 3.



Teorema
El algoritmo de Brelaz colorea con dos colores a los grafos bipartidos



– Hallar el número cromático de un grafo es un problema NP-completo

– Si existe un algoritmo polinómico de coloración que usa a lo más c $\chi(G)$ colores, entonces existe un algoritmo polinómico que determina $\chi(G)$

– Si $A^*(G)$ es el nº de colores usados por un algoritmo, la mejor razón $A^*(G)/\chi(G)$ alcanzada por un algoritmo polinómico es del orden $O(n(\log\log n)^2/(\log n)^3)$ (Halldorsson, 1993)

Número cromático χ y grado máximo Δ

Teorema

Para todo grafo G se tiene $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Basta colorear los vértices del grafo de forma secuencial. Al asignar color a cada vértice sus vecinos ya coloreados serán, a lo más, Δ
Como se dispone de Δ+1 colores, siempre queda uno libre.

La cota anterior no se puede mejorar:

$\chi(K_n) = n = \Delta + 1$

$\chi(C_{2k+1}) = 3 = \Delta + 1$

Teorema (Brooks, 1941)

Sea G un grafo conexo que no es ni completo ni un ciclo impar. Entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Demostración si G no es regular

Basta buscar una ordenación adecuada y colorear secuencialmente

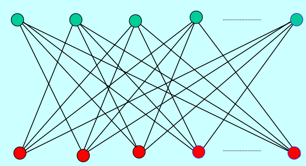
- v_n será un vértice tal que $d(v_n) < \Delta$ (que existe por la no regularidad).
- $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots$ serán los vecinos de v_n
- luego los vecinos de v_{n-1}, luego los de $v_{n-2}, \ldots$
- Como G es conexo estarán todos los vértices
- En $v_1, v_2, \ldots, v_n$ cada vértice es adyacente, a lo más, a Δ-1 de los anteriores. Luego al colorear en este orden bastan Δ colores

Coloreando con listas de colores

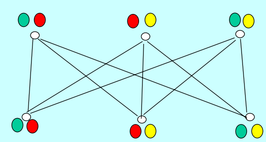
¿Qué sucede si en cada vértice sólo están disponibles los colores de una lista (que no es la misma en cada vértice)?

Un grafo G es *k-elegible* si cualquier asignación de k-listas de colores a sus vértices origina una coloración propia

Si G es un grafo bipartido entonces $\chi(G)=2$

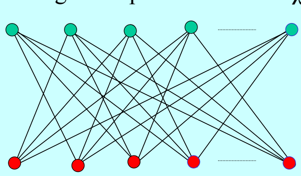


Pero puede no ser *2-elegible*

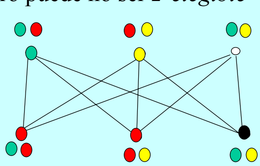


Con estas 2-listas
el grafo NO tiene
una coloración propia

Si G es un grafo bipartido entonces $\chi(G)=2$



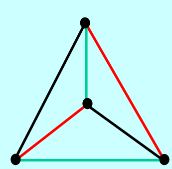
Pero puede no ser *2-elegible*



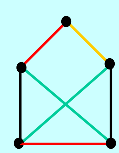
Con estas 2-listas
el grafo NO tiene
una coloración propia

Coloración de aristas

- Índice cromático



$\chi_1(G)=\Delta$

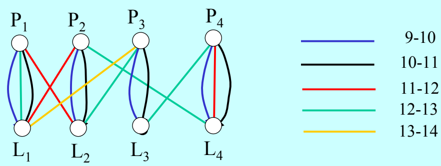


$\chi_1(G)=\Delta+1$

Elaboración de horarios

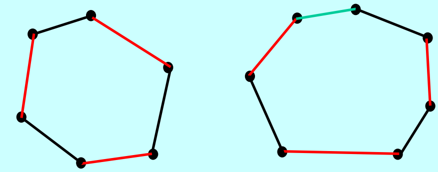
En una escuela hay r profesores, $P_1, P_2, \ldots, P_r$ y s aulas $L_1, L_2, \ldots, L_s$. Cada profesor P_i debe explicar en el aula L_j durante w_{ij} períodos lectivos diarios.

El problema de los horarios consiste en distribuir la docencia de modo que se minimice el nº de períodos usados.
Representamos la situación por un grafo bipartido G con los vértices $P=\{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ y $L=\{L_1, L_2, \ldots, L_s\}$ y w_{ij} aristas de P_i a L_j



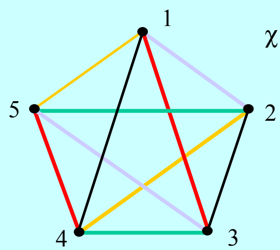
Propiedades del índice cromático

- $\chi_1(G) \geq \Delta(G)$
- $\chi_1(C_{2p})=2$, $\chi_1(C_{2p+1})=3$

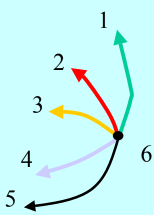


- Si G es un grafo bipartido entonces $\chi_1(G)=\Delta(G)$

Si n es impar, K_n admite una n-coloración en las aristas



$\chi_1(K_n)=n=\Delta+1$ si n es impar



Si n es par bastan n-1 colores $\chi_1(K_n)=n-1=\Delta$ si n es par

- Otra aplicación
  Calendario de una competición liguera

¿Cómo se elabora el calendario de la liga de fútbol?

Una coloración de aristas de K_{20}

Teorema (Vizing, 1964)

Si G es un grafo simple entonces

$\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G) + 1$

- La demostración conduce a un algoritmo eficiente para obtener una $(\Delta+1)$-coloración en las aristas de un grafo

- Calcular el índice cromático de un grafo es un problema NP-completo