Inversión de Matrices

Daniel Vaughan

Es bien conocido que en diversas aplicaciones de contabilidad nacional, así como en otras áreas de la economía, es usual encontrarse con la inversión de matrices. Ejemplos en contabilidad nacional son los modelos de multiplicadores insumo-producto de Leontief, y su extensión a matrices de contabilidad social (Pyatt, 1988). Es usual utilizar algún tipo de *software* para encontrar la inversa de una matriz, en caso de existir, así que en este documento se presentará un breve repaso del proceso de inversión de matrices y una ilustración de la solución numérica de este tipo de problemas.

Para empezar hay que recordar cómo se define la inversa de una matriz: se dice que una matriz cuadrada, A, tamaño n, es invertible (tiene inversa) si existe una matriz B de tamaño n, tal que el producto matricial por la izquierda y por la derecha es la matriz identidad. Esto es: B es la inversa de A si y solo si $BA = AB = I_n$. Es fácil demostrar que la inversa de una matriz es única.[1] Si una matriz es invertible, se dice que es no singular, de lo contrario la matriz es singular. Para verificar si una matriz es invertible se puede utilizar el siguiente resultado:

IM 1 *Una matriz cuadrada A, de tamaño n, es singular si su determinante es igual a cero. Esto es, A es singular si y sólo si* $|A| = 0$*. De manera análoga, una matriz es no singular sii* $|A| \neq 0$*.*

Ejemplo 1 *La matriz identidad de tamaño n* (I_n) *es invertible. Para verificar esto se puede utilizar tanto la definición o el resultado 1. En el primer caso, basta encontrar una matriz B que cumpla con la propiedad de ser inverso multiplicativo a izquierda y a derecha:* $BI_n = I_nB = I_n$*, es decir, una matriz que al multiplicarse, a derecha y a izquierda, por* I_n *produzca la misma matriz* I_n*. Es fácil ver que* I_n *es la (única) matriz que cumple con esta propiedad:* $I_nI_n = I_n$*. Así que la matriz inversa de* I_n*,* I_n^{-1}*, es ella misma.*

Ahora, utilizando el segundo resultado se puede ver que la matriz identidad es no singular, es decir, es invertible. Para esto hay que mostrar que el determinante de la matriz identidad es distinto de cero. El proceso se agiliza si se recuerda que el determinante de una matriz diagonal es el producto de todos los elementos sobre la diagonal.[2] *Así, en el caso de la matriz identidad,* $|I_n| = \prod_{i=j} I_{ij} = 1^n = 1 \neq 0$*. Así que la matriz identidad es invertible.* ■

Ejemplo 2 *La matriz* $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ *es invertible.*

Para esto hay mostrar que la matriz es no singular, o que su determinante es no nulo. Utilizando la expansión por menores de una matriz, para encontrar el determinante se puede ver que:
$|B| = 2|B_{11}| - 0|B_{21}| + 3|B_{31}| = 2(1 \cdot 7 - (-1) \cdot 5) - 0(4 \cdot 7 - 3 \cdot 5) + 3(4 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) = 3 \neq 0$*. Por lo tanto, de acuerdo con el resultado 1, la matriz B es invertible.* ■

Ejemplo 3 *La matriz* $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ *no es invertible.*

[1] Se puede demostrar por contradicción: Sea A una matriz cuadrada invertible, y supóngase que $B \neq A^{-1}$ es otra matriz inversa de A. Es decir, $AB = BA = I_n$. Premultiplicando a ambos lados de la igualdad por A^{-1} y utilizando la propiedad de la matriz inversa, A^{-1}, se tiene: $A^{-1}AB = (A^{-1}A)B = I_nB = B = A^{-1}I_n = A^{-1}$, así que $B = A^{-1}$, contradiciendo la hipótesis. Para demostrar la segunda igualdad se utiliza un procedimiento análogo. De esta forma se concluye que la inversa de una matriz es única.

[2] Una matriz cuadrada diagonal es una matriz donde todos los elementos que están por fuera de la diagonal son iguales a cero. Dicho de otra forma, una matriz A es diagonal, si $[a_{ij}] = 0$ para todo $i \neq j$. Nótese que la matriz identidad es una matriz diagonal.

Para verificar lo anterior basta calcular el determinante de la matriz:
$|C| = 2|C_{11}| - 0|C_{21}| + 4|C_{31}| = 2(1 \cdot 6 - (-1) \cdot 8) - 0(4 \cdot 6 - 3 \cdot 8) + 4(4 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) = 0$, *por lo que la matriz C es singular o no invertible.*

Nótese que la tercera fila se obtiene al multiplicar por 2 cada elemento de la primera fila, así que las dos filas son linealmente dependientes, o lo que es igual, la matriz no es de rango (fila) completo y por lo tato es no invertible. Para ilustrar al lector, este tipo de matrices se encuentran con frecuencia en econometría, cuando hay multicolinealidad perfecta entre dos variables, es decir, cuando dos regresores de un modelo econométrico son linealmente dependientes, y por lo tanto hay una correlación perfecta entre las dos. En un modelo de multiplicadores insumo-producto esto sucedería si dos o más filas (columnas) de coeficientes tecnológicos son iguales o son linealmente dependientes. En estos casos la matriz es singular. Muchos paquetes econométricos comerciales suelen utilizar una variación de la matriz inversa, conocida como la inversa generalizada, seudo-inversa, o inversa de Moore-Penrose. Sobre este tema no se va a profundizar, así que se recomienda al lector interesado revisar Weisstein (2004), o para una descripción más completa, Rao and Mitra (1971) ■.

Los libros de Álgebra Lineal suelen presentar dos métodos de inversión de matrices: eliminación *Gauss-Jordan* y el método de la matriz adjunta. El primero utiliza el esquema de solución de sistemas de ecuaciones lineales, mientras que el segundo aprovecha algunas propiedades de los determinantes y su relación con la matriz inversa.

1. Inversión de Matrices por Gauss-Jordan

El problema de encontrar la inversa de una matriz se puede escribir así: se busca una matriz B tal que $A \cdot B = I_n$. En el caso más simple, si la dimensión de la matriz es uno (*i.e.* A es un escalar), el problema se reduce a la solución de una ecuación con una incógnita: $a \cdot x = 1$, de donde, $a^{-1} = 1/a = x$. En el caso de una matriz de tamaño dos, el problema de encontrar la matriz inversa es equivalente a resolver un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

O reescribiendo (1) como un sistema de ecuaciones,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_3 = 1 \tag{2}$$
$$a_{11}x_2 + a_{12}x_4 = 0 \tag{3}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_3 = 0 \tag{4}$$
$$a_{21}x_2 + a_{22}x_4 = 1 \tag{5}$$

Lo anterior se puede generalizar a problemas de cualquier dimensión. El primer método utiliza esta analogía entre la inversa de una matriz y la solución de un sistema lineal de ecuaciones. El método *Gauss-Jordan* (GJ, de ahora en adelante) hace uso de la siguiente propiedad de las matrices inversibles (Hoffman y Kunze, pp. 22):

IM 2 *Sea A una matriz inversible nxn. Si una sucesión de operaciones elementales de fila reduce A a la matriz identidad, entonces la misma sucesión de operaciones, cuando se aplica a I_n, da A^{-1}.*

El método consiste en construir la matriz aumentada $[A|I_n]$ (de tamaño nx2n) y realizar operaciones elementales de fila hasta llegar a la matriz $[I_n|B]$. La propiedad anterior garantiza que $B = A^{-1}$. Hay que recordar los tres tipos de operaciones elementales de fila[3]:

[3] Véase Grossman, pp.10

- Multiplicación de una fila de A por un escalar no nulo.
- Suma de un múltiplo de una fila a otra fila.
- Intercambio de dos filas.

Para ilustrar el Método GJ tómese la siguiente matriz que se había utilizado en el ejemplo 2.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

El primer paso es construir la matriz aumentada $C = [B|I_3]$.

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

El siguiente paso consiste en transformar, por medio de operaciones elementales, la primera columna de C, en una columna con 1 como primer elemento y ceros en las demás filas. Para esto, se multiplica la primera fila por un medio ($\frac{1}{2}F_1$) y a la tercera se le resta tres veces la primera ($-3F_1 + F_3$).[4] Se obtiene la siguiente matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A continuación se realiza el mismo procedimiento: se desea que el segundo elemento de la diagonal sea un 1 (ya lo es), y los demás elementos de la columna 0. Las operaciones son las siguientes: A la primera fila se le resta dos veces la segunda ($-2F_2 + F_1$), y se suma la segunda a la tercera ($F_2 + F_3$).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7/2 & 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Por último se opera de la misma forma sobre la tercera columna: Se multiplica la tercera fila por $\frac{2}{3}$ ($F_3' = \frac{2}{3}F_3$), se suma la nueva tercera fila a la segunda ($F_3' + F_2$) y a la primera se resta $-\frac{7}{2}$ veces la nueva tercera ($-\frac{7}{2}F_3' + F_1$). La nueva matriz es

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -13/3 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

Nótese que al lado izquierdo se tiene la matriz identidad, así que, de acuerdo con lo anterior, la matriz inversa de B, B^{-1} es

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -13/3 & -7/3 \\ -1 & 5/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

El lector puede verificar que el resultado es correcto comprobando que $BB^{-1} = B^{-1}B = I_3$■

2. Inversión de Matrices Utilizando la Matriz Adjunta

La segunda alternativa utiliza el siguiente resultado (Grossman, pp.214, Teorema 3):

IM 3 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A)$

[4] Entre paréntesis se irán mostrando, en forma reducida, las operaciones elementales que se están utilizando.

donde, $|A|$ es el determinante de la matriz cuadrada A, y $Adj(A)$ es la matriz adjunta de A. Hay que recordar que la matriz adjunta es la matriz de cofactores de A, transpuesta ($Adj(A) = [CofA]^T$). Para encontrar la matriz de cofactores se utiliza la siguiente definición (Grossman, pp. 175):

IM 4 *El cofactor (i,j) de una matriz cuadrada A, A_{ij}, está dado por*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

donde M_{ij}, ***el menor ij*** *de A, se obtiene de eliminar la fila i y la columna j de A.*

La matriz de cofactores es la matriz donde el elemento (i,j) está dado por el cofactor (i,j). Así, en el ejemplo anterior:

$$CofA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

donde

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3 \ ,$$

sucesivamente hasta llegar al último cofactor,

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

De esta forma, la matriz de cofactores de A es:

$$CofA = \begin{bmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Al transponer se obtiene la matriz adjunta. El determinante de la matriz es igual a 3, así que:

$$A^{-1} = \tfrac{1}{|A|}Adj(A) = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

igual al resultado obtenido por el método GJ ■.

3. Soluciones numéricas y soluciones analíticas

Aunque los dos métodos descritos son utilizados para encontrar la inversa de una matriz, cuando la matriz es grande o la inversión de la matriz hace parte de un método numérico más grande,[5] el proceso puede ser automatizado.[6] De los dos métodos descritos el primero es el que se utiliza en aplicaciones numéricas, por la facilidad para programar las operaciones elementales de filas (y de columnas). El método se conoce como *pivoteo (parcial o completo)*, y consiste en encontrar el mejor pivote (elemento de la diagonal que servirá para anular los elementos de las demás filas en la misma columna).

[5] Como se mencionó al principio de este documento, la inversa de una matriz tiene diversas aplicaciones en economía y por tal razón en la mayoría de algoritmos hay una subrutina de inversión de matrices. Ejemplos de esto son el cálculo de la matriz de Leontief, la solución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, la estimación econométrica por mínimos cuadrados y máxima verosimilitud, etc.

[6] Encontrar analíticamente, o a mano, inversas de matrices de tamaño mayor o igual a 4, por cualquiera de los dos métodos, puede ser un procedimiento extenso y tedioso, sujeto a errores de cálculo por la gran cantidad de operaciones que se necesitan. Para el lector incrédulo se deja como ejercicio encontrar la inversa de una matriz 4x4 utilizando el método de su predilección.

En el momento de programar numéricamente el procedimiento hay que tener en cuenta la eficiencia del algoritmo, en términos de la velocidad (orden de convergencia) y del espacio de memoria utilizado. Por tal razón, algunas de las aplicaciones numéricas utilizan variantes más eficientes del método GJ, ya sea utilizando una única matriz en el espacio de memoria, o alguna descomposición de la matriz. Una descomposición utilizada con frecuencia es la denominada **LU**. Si una matriz cuadrada A, se puede escribir de la forma $A = LU$, donde las matrices L y U son matrices triangulares inferior y superior, respectivamente, la inversión de la matriz se puede hacer por sustitución hacia atrás y hacia adelante. El proceso se realiza en dos etapas: en la primera se encuentra una descomposición LU de la matriz, y en el segundo se procede a realizar la inversión de la matriz.

Para ver esto, primero tómese un sistema de ecuaciones $BX = Y$, donde B es una matriz de parámetros, cuadrada de tamaño n, X un vector de variables de dimensión nx1, e Y un vector de parámetros de tamaño nx1. Si se encuentra una descomposición LU de la matriz B, el sistema se puede reescribir como $(LU)X = Y$, y la matriz inversa de X se puede encontrar en un procedimiento de dos etapas: en la primera etapa se resuelve por inducción hacia adelante el sistema $L(UX) = LX' = Y$, y en la segunda etapa se resuelve el sistema $UX = X'$ por inducción hacia atrás. La solución por inducción hacia atrás se ilustra a continuación.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Este sistema transformado se puede solucionar por sustitución hacia atrás de la siguiente forma:

$$x_3 = \frac{x'_3}{u_{33}} \tag{7}$$

$$x_2 = \frac{1}{u_{22}}(x'_2 - u_{23}x_3) \tag{8}$$

$$x_1 = \frac{1}{u_{11}}(x'_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3) \tag{9}$$

Nótese que este método depende de la elección de los elementos pivotes, de tal forma que los elementos u_{ii} sean distintos de cero y las operaciones anteriores estén bien definidas. El método de sustitución hacia atrás o hacia adelante (dependiendo de si la matriz es triangular superior o inferior, respectivamente) es más eficiente para resolver sistemas de ecuaciones cuando la dimensión de la matriz aumenta, aunque para el caso particular de la inversión de matrices tiene prácticamente el mismo número de operaciones que el método completo de GJ. En el caso de matrices poco densas, características de los problemas de gran escala, la descomposición LU puede ser más eficiente que realizar el procedimiento GJ directamente.[7](Press, et.al, 1992, pp. 48)

[7]La densidad de una matriz denota el porcentaje de elementos no nulos en la matriz. Dicho de otra forma, una matriz densa es aquella en donde hay una proporción grande de elementos no nulos.

Referencias

GROSSMAN, S. (1996): *Álgebra Lineal Quinta Edición*. México: McGraw-Hill.

K.HOFFMAN, AND R. KUNZE (1991): *Álgebra Lineal*. Prentice Hall.

PYATT, G. (1988): "A SAM Approach to Modeling," *Journal of Policy Modeling*, 10(3), 327–352.

RAO, C., AND S. MITRA (1971): *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*. New York: Wiley.

WEISSTEIN, E. (2004): "Moore-Penrose Matrix Inverse," *MathWorld-A Wolfram Web Resource.http://mathworld.wolfram.com/Pseudoinverse.html*.

WILLIAM PRESS, SAUL TEUKOLSKY, W. V., AND B. FLANNERY (1996): *Numerical Recipes in C. The art of scientific computing. Second Edition*. Cambridge University Press.