Los modelos matemáticos son fundamentales en los sistemas de control porque nos permiten hallar la respuesta del sistema para determinadas entradas al mismo y de esta forma, predecir el comportamiento de dicho sistema. Para vincular la teoría del control con los sistemas de información la mayor dificultad se encuentra en la definición del modelo matemático.

2.7 Problemas resueltos

1) Dado un sistema de control que utiliza un potenciómetro para ajustar las entradas de tensión al sistema, hallar la salida del potenciómetro si:

K: sensibilidad del potenciómetro = 0,1 volt/radianes.

Pp: precisión del potenciómetro = 5 radianes.

Solución:

Vs (tensión de salida del potenciómetro) = k · Pp=

= 0,1 x 5 = 0,5 volts.

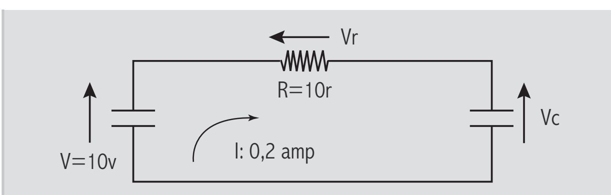
2) Si tuviera que diseñar un sistema de control que requiera un motor para obtener una velocidad constante, ¿qué tipo de motor emplearía? ¿Por qué? ¿Cómo estaría constituido?

Solución:

a. El motor debería ser de corriente alterna, dado que la frecuencia es el factor determinante en la velocidad.

b. Estaría constituido por un estator y un rotor. El estator es la parte externa que no gira, y que al ser alimentado con corriente alterna genera un campo magnético en el que gira el rotor; debido a ese campo.

3) Dado el circuito RC de la figura siguiente, hallar la tensión sobre el capacitor aplicando la segunda ley de Kirchhoff.



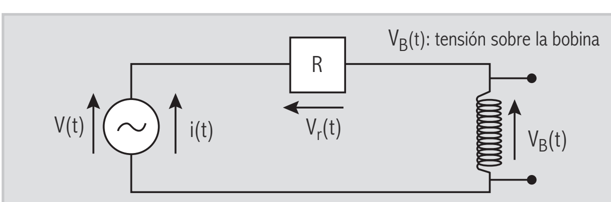
$V = Vr + Vc$ *2da. ley de Kirchhoff*

$Vc = V - Vr =$

$Vr = I \,.\, R = 0{,}2 \text{ amp } 10\ \Omega = 2v$

$Vc = 10v - 2v = 8 \text{ volts}$

4) Dado el siguiente circuito, obtener la relación entre la salida y la entrada.



Aplicando la segunda ley de Kirchhoff

$$V(t) = V_I(t) + V_B(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{2}\int V_B(t) \cdot dt$$

$$V(t) = i(t) \cdot R + V_B(t)$$

$$V(t) = \frac{R}{L}\int V_B(t) + V_B(t)$$

5) Hallar la analogía eléctrica entre la ecuación 2-43 que describe cómo varía la temperatura de la barra TM cuando se la sumerge en el líquido, como podría ser la glicerina caliente TL.

Solución:

$$R \cdot C \frac{\mathrm{d}T_M}{\mathrm{d}t} + T_M = T_L \qquad (2\text{-}43)$$

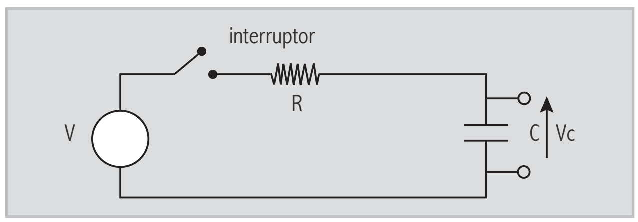
Donde R: resistencia térmica de la glicerina

C: Capacitancia térmica de la barra.

TM: temperatura de la barra.

TL: temperatura de la glicerina.

La analogía eléctrica sería:



Donde recordemos que para el circuito eléctrico de la figura tenemos la siguiente expresión:

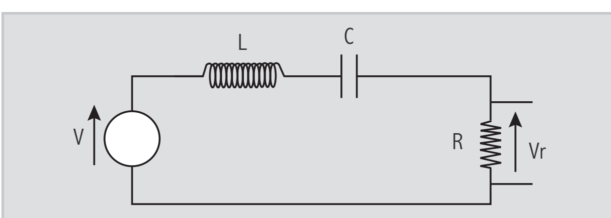
$$V = R.C\frac{dVc}{dt} + Vc$$

Cerrar el interruptor equivale a introducir la barra en la glicerina; en ese instante la corriente y el calor empiezan a fluir.

El aumento de la temperatura en la barra equivale al incremento de la tensión sobre el capacitor en el circuito eléctrico.

2.8 Problemas propuestos

1. Para un circuito RLC serie hallar la relación entre la salida, la diferencia de potencia VR y la entrada.



2. Se introduce una pieza de metal con capacitancia térmica C en un recipiente que está a la temperatura TR. El sistema térmico tiene una resistencia R y la pieza, una temperatura TP. Obtener la ecuación que describe cómo varía la temperatura de la pieza de metal con el tiempo.
3. Explicitar el funcionamiento de los censores fotoeléctricos.
4. Detallar los diferentes tipos de motores de corriente continua y su principio de funcionamiento.
5. ¿Qué función cumplen los sistemas sincrónicos? Cite ejemplos.

De esta forma, podemos averiguar qué pasa con la función $f_{(t)}$ cuando t tiende a infinito. En nuestro caso, la función es el error en estado estable, en consecuencia tenemos:

$$\boxed{e_s = \lim_{s \to 0} S \cdot E(s)} \tag{6-4}$$

Para un sistema de lazo abierto teniendo en cuenta la expresión (6-2) el error será:

$$e_s = \lim_{s \to 0} \left\{ S[1 - T(s)] \cdot S_i(s) \right\} \tag{6-5}$$

Para un sistema de lazo cerrado teniendo en cuenta la expresión (6-3) el error será:

$$e_s = \lim_{s \to 0} \left\{ S \cdot \frac{1}{1 + T^*(s)} \cdot S_i(s) \right\} \tag{6-6}$$

Podemos concluir que el error en estado estable de un sistema de control depende del valor que tome la expresión (6-4). En ésta se puede observar que $E(s)$ depende del valor que tome la función transferencia en la trayectoria directa, para un sistema de lazo cerrado en el que la realimentación es unitaria. En resumen el error depende de la señal de entrada al sistema $Si(s)$ y la función transferencia en lazo abierto del sistema en lazo cerrado $T^*(s)$.

Es por ello que vamos a analizar el comportamiento de los sistemas de acuerdo con el valor que tome la función $T^*(s)$, también conocida como “función transferencia en lazo abierto del sistema en lazo cerrado”. Para efectuar ese análisis, primero debemos clasificar las funciones de transferencia $T^*(s)$, que, en general, se pueden representar con la siguiente expresión:

$$T^*(s) = \frac{k(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + ... + a_1 s + a_0)}{s^q(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_1 s + b_0)} \tag{6-7}$$

Donde: a_0 y b_0 nunca pueden ser cero; k es una constante, y m, n y q son enteros. La clase o el tipo de sistema quedan dados por el valor que tome q. Si $q = 0$, el sistema es tipo 0, si $q = 1$, el sistema es tipo 1 y así, sucesivamente.

El tipo de sistema estará dado por la cantidad de términos independientes “s” existentes en el denominador de la expresión $T^*(s)$. Como se explicará más adelante, el error en estado estable depende del tipo de sistema.

Ejemplos: determinar el tipo de sistema correspondiente a las siguientes funciones transferencia $T^*(s)$.

a. $\dfrac{5}{(s+2)(s+1)}$

c. $\dfrac{(s+3)}{s^2+s+2}$

b. $\dfrac{4}{s^2(s^2+s+1)}$

d. $\dfrac{5}{s(s^2+s+4)}$

Respuestas:

a. Dado que en el denominador no hay términos independientes “s”, el tipo de sistema es cero.
b. El sistema es tipo 2, dado que s está elevado al cuadrado.
c. El sistema es tipo cero.
d. El sistema es tipo uno.

En referencia al segundo factor que influye en el error en estado estable, es la señal de entrada Si(s). A modo de ejemplo, analizaremos el error para una función transferencia $T^*(s)$ tipo cero y una tipo uno cuando la entrada es una señal escalón, y para una función tipo uno cuando la entrada es una rampa, respectivamente.

6.5 Cálculo del error cuando la señal de entrada es rampa y la función transferencia es tipo uno

En este caso, en la expresión (6-6) se debe reemplazar $S_i(s)$ por $1/s^2$, por tratarse de una función rampa, en consecuencia quedará:

$$e_s = \lim_{s \to 0} \left[\cancel{s} \cdot \frac{1}{1 + T^*(s)} \cdot \frac{1}{s^2} \right] \tag{6-10}$$

De esta forma, cuando s tiende a cero la ecuación 6-10 se convierte en:

$$e_s = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s \cdot T^*(s)}$$

Recordemos que $T^*(s)$ es la función transferencia en lazo abierto de un sistema en lazo cerrado con realimentación unitaria. Analicemos qué sucede para los diferentes tipos de sistemas:

a. Si $T^*(s)$ es tipo cero, q es igual a cero, entonces: $s \cdot T^*(s)$ será igual a:

$$\frac{s \cdot k(s^m + a_{m-1} s^{m-1} + ... + a_1 s + a_0)}{(s^n + b_{n-1} s^{n-1} + ... + b_1 s + b_0)}$$

Y en consecuencia será:

$$\lim_{s \to 0} s \cdot T^*(s) = 0$$

De esto resulta que el error en estado estable es infinito. $\boxed{e_s \to \infty}$ (6-11)

b. Si $T^*(s)$ es tipo uno, q es igual a uno, entonces: $s \cdot T^*(s)$ será igual a:

$$\frac{\cancel{s} \cdot k(s^m + a_{m-1} s^{m-1} + ... + a_1 s + a_0)}{\cancel{s}(s^n + b_{n-1} s^{n-1} + ... + b_1 s + b_0)}$$

En consecuencia el

$$\lim_{s \to 0} s \cdot T^*(s) = k \cdot \frac{a_0}{b_0} = k_v$$

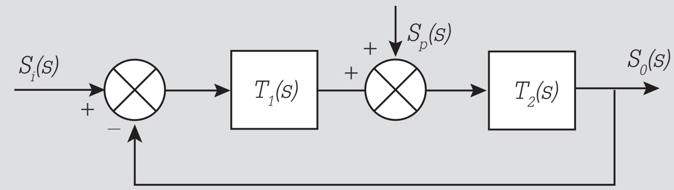
Y el error en estado estable es:

$$\boxed{e_s = \frac{1}{k_v}} \tag{6-12}$$

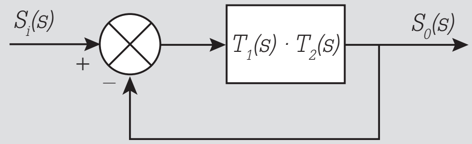
En la figura 6-5, se detalla el error en estado estable cuando la entrada es una señal rampa.

c. Si $T^*(s)$ es de un tipo mayor que uno, el error en estado estable es igual a cero, dado que $s\,T^*(s)$ tiende a infinito cuando s tiende a cero.

En la tabla 6-1, se resumen los errores estacionarios para sistemas tipos 0, 1, 2 y 3 sometidos a entradas escalón, rampa y parábola.

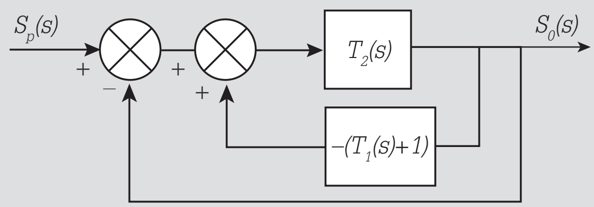


Si $S_p(s) = 0$ y $S_i(s) \neq 0$



$$e(s)_1 = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + T_1(s) \cdot T_2(s)} \cdot S_i(s) \right] \quad (6\text{-}12)$$

Si $S_p(s) \neq 0$ y $S_i(s) = 0$



$$e(s)_2 = \lim_{s \to 0} \left[-s \cdot \frac{T_2(s)}{1 + T_2(s) \cdot [T_1(s) + 1]} \cdot S_p(s) \right] \quad (6\text{-}13)$$

el error total: $\boxed{e(s_t) = e(s_1) + e(s_2)}$ (6-14)

Fig. 6-6 Error en estado estable debido a perturbaciones.

6.7 Estabilidad de los sistemas de control

El requerimiento principal de los sistemas de control es que sean estables, esto es, que se encuentren en estado de equilibrio, ya que de lo contrario se deberá estudiar la posibilidad de llevarlo a ese estado. Los sistemas inestables, en los que no se puede predecir su salida con exactitud, carecen de valor para su estudio, modelización e implantación práctica.

Bajo condiciones óptimas de funcionamiento y materiales con comportamiento ideal, sin fallas ni perturbaciones, se puede afirmar que un sistema de lazo cerrado siempre es estable.

Existen diversas clasificaciones de estabilidad, como estabilidad absoluta, marginal o relativa. En los casos en los que se define a un sistema como estable o inestable, se hace referencia a la estabilidad absoluta. En caso de necesitar especificar el grado de estabilidad, entonces se hace referencia a la estabilidad relativa. El sistema de control es estable si al aplicarle una entrada de referencia de magnitud finita, a la salida se obtiene un valor también finito.

Para sistemas lineales, el requerimiento de estabilidad se puede definir en términos de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado.

Si recordamos que toda función transferencia se puede escribir en forma genérica como:

$$T(s) = \frac{k(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + ... + a_1 s + a_0)}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_1 s + b_0} \tag{6-15}$$

Y hallamos las raíces de los polinomios del numerador y el denominador tendremos:

$$T(s) = \frac{k(s + c_1)(s + c_2)(s + c_3)....(s + c_m)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)....(s + p_n)} \tag{6-16}$$

Donde $c_1, c_2, c_3, \ldots c_m$ son los ceros del numerador, y p1, p2, p3, . . .pn son los polos del denominador.

Cabe aclarar que las raíces (polos o ceros) pueden ser números reales o complejos de la forma $s = \sigma + jw$, donde σ es la parte real y jw la imaginaria.

Ejemplos:

a. $T(s) = \dfrac{s + 2}{(s + 1)(s - 3)}$; tiene un cero en: $C = -2$ y dos polos en $P_1 = -1$ y $P_2 = +3$

b. $T(s) = \dfrac{1}{s^2 + s + 1}$; tiene dos polos en: $p_1 = -\dfrac{1}{2} + j(0.87)$ y $p_2 = -\dfrac{1}{2} - j(0.87)$

c. $T(s) = \dfrac{s}{s - 2}$; tiene un cero en: $C = 0$ y un polo en $P = +2$

d. $T(s) = \dfrac{1}{s + 4}$; tiene un polo en $P = -4$, no tiene ceros

Hasta aquí hemos visto el análisis de la función transferencia, pero, ¿cómo se vincula con la estabilidad del sistema?

Para ello debemos representar los polos y los ceros en un diagrama denominado "patrón de polos y ceros", como se indica en la figura 6-8.

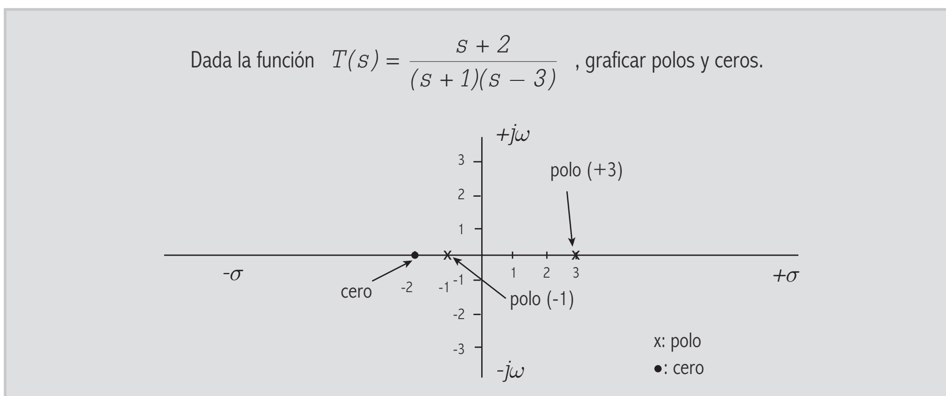


Fig. 6-8 Patrón de polos y ceros de una función transferencia T(s).

Para determinar la estabilidad del sistema se puede introducir en él una señal impulso. Si, como se indicó antes, al cabo de un tiempo la salida tiende a cero, estaremos en presencia de un sistema estable; si la señal crece, el sistema será inestable, y si oscila, será críticamente estable.

Ahora retornemos a nuestra función transferencia. Si ésta tiene polos con parte real positiva, significa que incluye un término del tipo $(s - p)$, y como ya vimos, implica que en el dominio

6.8 Determinación de la estabilidad de un sistema mediante el método de Routh-Hürwitz

Edward Joan Routh. 20 de enero de 1831 (Quebec, Canadá) – 7 de junio de 1907 (Cambridge, Inglaterra). Matemático. Sistematizó la teoría matemática de la mecánica y creó varias ideas fundamentales para el desarrollo de la teoría moderna de los sistemas de control, entre las que se destacan el teorema de Hürwitz-Routh.

El método de Routh–Hürwitz se utiliza para comprobar de manera efectiva la estabilidad de los sistemas dinámicos de lazo cerrado, además de brindar información respecto de su comportamiento.

Este método permite hallar las raíces del denominador de la función de transferencia del sistema y posteriormente ubicarla en el semiplano izquierdo o derecho; y así se determina la estabilidad del sistema.

Si luego de aplicar el criterio, todos los polos están en el semiplano izquierdo, el sistema es estable.

Mediante el método analizado hasta aquí (polos y ceros) se puede determinar con rapidez la estabilidad del sistema con sólo evaluar las raíces del denominador; no obstante, esta tarea no resulta sencilla si éste posee una ecuación compleja como cuando el grado es mayor que 3 o 4, y entonces hallar las raíces resulta dificultoso.

El polinomio del denominador se puede presentar de la forma:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + ... + a_1 s + a_0 \tag{6-17}$$

El método de Routh-Hürwitz involucra dos pasos:

Adolf Hürwitz 26 de marzo de 1859 (Hildesheim, Alemania) – 18 de noviembre de 1919 (Zurich, Suiza). Matemático. Su aporte fundamental fue el estudio de las curvas algebraicas (lugares geométricos determinados por un conjunto de polinomios independientes) mediante el uso de las superficies de Riemann (funciones de variable compleja unidimensionales que satisfacen ciertas condiciones de continuidad y diferenciabilidad). El procedimiento de Hürwitz, al estudiar las curvas algebraicas, fue determinar la superficie algebraica que pudiera contener a una curva dada y a partir de las caracteríscas de la superficie encontrada deducír las características de la misma. Es como retorcer un mantel de plástico que contega un alambre y a partir de lo doblado del mantel deducir lo doblado del alambre.

Paso N.°1:

Éste consiste en analizar los coeficientes del polinomio del denominador de la función transferencia *T(s)*.

a. Si todos son positivos y ninguno es cero, el sistema puede ser estable.
b. Si uno o más coeficientes son negativos, el sistema es inestable.
c. Si uno de los coeficientes es cero, el sistema puede ser inestable o críticamente estable.

Paso N.°2:

Para los casos "a" y "c", cuando el sistema puede ser **estable** o **críticamente estable**, se realiza esta segunda prueba, que consiste en el siguiente proceso:

Dado un sistema cuya función transferencia es *T(s)* y tiene como denominador la expresión 6-17, se construye la matriz siguiendo los criterios que siguen:

Los coeficientes del denominador de la función transferencia *T(s)* se escriben según el arreglo de Routh.

$$
\begin{array}{c|cccc}
\boldsymbol{S^{n}} & \boldsymbol{a_{n}} & \boldsymbol{a_{n-2}} & \boldsymbol{a_{n-4}} & \boldsymbol{\cdots} \\
\boldsymbol{S^{n-1}} & \boldsymbol{a_{n-1}} & \boldsymbol{a_{n-3}} & \boldsymbol{a_{n-5}} & \boldsymbol{\cdots} \\
S^{n-2} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\
S^{n-3} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
S^{0} & \delta_1 & & &
\end{array}
$$

Los primeros dos renglones o filas (S^{n} y S^{n-1}) se determinan directamente extrayendo los coeficientes del denominador de la función de transferencia, siguiendo el criterio expuesto antes en la matriz.

El tercer renglón (S^{n-2}):

$$\alpha_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n - a_{n-3}}{a_{n-1}}\right)$$

$$\alpha_2 = a_{n-4} - \left(\frac{a_n - a_{n-5}}{a_{n-1}}\right)$$

El cuarto renglón (S^{n-3}):

$$\beta_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{\alpha_1} - \alpha_2\right)$$

$$\beta_2 = a_{n-5} - \left(\frac{a_{n-1}}{\alpha_1} - \alpha_3\right)$$

Si todos los coeficientes de la primer columna resultante de aplicar el método de Routh-Hürwitz son positivos el sistema es estable.
Si alguno es negativo el sistema es inestable.
Si alguno es cero el sistema es críticamente estable.

Y así sucesivamente, el quinto y demás renglones o filas, hasta obtener ceros en toda la última fila.

Del resultado de la matriz se concluye que:

a. Si todos los elementos de la primera columna resultante de aplicar el método de Routh-Hürwitz son positivos, el sistema es estable.

b. Si alguno de ellos es 0, entonces será críticamente estable.

c. Si alguno de ellos es menor que 0 (negativo), el sistema es inestable.

El número de cambios de signo en la primera columna resultante: a_n, a_{n-1}, α_1, β_1, …, δ_1, informa los elementos que están en el semiplano derecho, esto es, el número de raíces con partes reales positivas.

Ejemplo 1: $T(s) = s^4 + Ks^3 + s^2 + s + 1$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
s^3 & K & 1 & 0 \\
s^2 & \frac{K-1}{K} & 1 & 0 \\
s^1 & 1 - \frac{K^2}{K-1} & 0 & 0 \\
s^0 & 0 & &
\end{array}
$$

Para estudiar la estabilidad:

(1) $K > 0$

(2) $\dfrac{K-1}{K} > 0$

(3) $1 - \dfrac{K^2}{K-1} > 0$

A partir de (1) y (2) se concluye que K debe ser mayor que 1. Para que se cumpla que K sea mayor a 1, observe que el término (3) siempre es negativo ya que:

$$\frac{K-1-K^2}{K-1} = \frac{-1+K(1-K)}{K-1} < 0$$

Por lo tanto, no es posible cumplir con las tres condiciones en forma simultánea. En conclusión, no existe un valor de K que permita al sistema ser estable.

Ejemplo 2: $s^4 + 8s^3 + 26s^2 + 16s + 22$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 26 & 22 \\
s^3 & 8 & 16 & 0 \\
s^2 & 24 & 22 & 0 \\
s^1 & 16-\frac{176}{24} & 0 & 0 \\
s^0 & 22 & &
\end{array}$$

Se puede observar que en la primera columna no hay cambios de signo y son todos positivos, con lo cual, el sistema es estable, ya que tiene todos sus polos en el semiplano izquierdo.

Ejemplo 3: de denominador con una incógnita:

$$G(s) = \frac{K}{s+2} \qquad H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Lo cual implica que:

$$F(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2+3s+(K+2)}$$

Construimos la matriz de Routh-Hürwitz:

$$\begin{array}{c|cc}
s^2 & 1 & K+2 \\
s^1 & 3 & \\
s^0 & K+2 &
\end{array}$$

Resultados posibles:

Para que todas las raíces estén en el semiplano izquierdo, y, por lo tanto, el sistema sea estable, (K+2) debe ser mayor que 0, entonces, K debe ser mayor que -2.

Se puede concluir que para cualquier valor de K superior a -2 el sistema será estable, y para cualquier valor menor que -2 será inestable. Para cuando K sea -2 el sistema tendrá estabilidad marginal, o sea que será críticamente estable.

Ejemplo 4: $s^3 + 10s^2 + 5s + K$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 10 & K \\ s^1 & \frac{50-K}{10} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

Para que el sistema sea estable: $50 - K > 0$ y $K > 0$

De las desigualdades anteriores, se obtiene que el sistema será estable si: $0 < K < 50$.

En los casos que $K = 50$ o $K = 0$, el sistema será críticamente estable.

6.8.1 Casos especiales del método de Routh-Hürwitz

Hay dos casos especiales en el análisis del método Routh-Hürwitz:

Caso1: Cuando se finaliza en forma anticipada con la conformación del arreglo, es decir, que existe una fila completa de 0, siendo ésta una fila intermedia, es decir, no la última.

En este caso, se indica que existe un polinomio divisor cuyas raíces son imaginarias, y se debe aplicar la derivada de s a la fila inmediata anterior a la fila de 0, para luego realizar el análisis correspondiente de cambios de signo de la primera columna.

Ejemplo Caso1:

Determinar si el siguiente polinomio corresponde a un sistema estable.

$$s^3 + s^2 + 4s + 4$$

Aplicamos el método de Routh-Hürwitz y obtenemos:

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 4 & 0 \\ s^2 & 1 & 4 & 0 \\ s^1 & 0 & 0 & \longrightarrow \text{renglón “0”} \\ s^0 & & & \end{array}$$

El renglón correspondiente a “ceros” está indicando la existencia de raíces en el campo complejo. Para poder continuar aplicando el criterio de Routh-Hürwitz hay que generar un polinomio a partir de los coeficientes del renglón anterior:

$$P(s) = s^2 + 4$$

y hallando la derivada, se obtiene:

$$P'(s) = 2 \,.\, S$$

Por último, se reemplazan los coeficientes del polinomio en el renglón de “ceros”.

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^3 & 1 & 4 & 0 \\
s^2 & 1 & 4 & 0 \\
s^1 & 2 & 0 & \\
s^0 & 4 & &
\end{array}
$$

Todos los componentes de la primera columna son mayores a cero, por lo tanto, el sistema es estable.

Caso2: Cuando en la primera columna resultante de la aplicación del método existe al menos un 0.

En dicho caso se debe sustituir el 0 definiendo un número f, que es casi cero (infinitesimalmente positivo), y posteriormente se continúa con el arreglo. Luego se calcula el límite para f tendiendo a cero si el resultado es negativo estamos en presencia de un sistema inestable.

Ejemplo Caso2: $s^4 + s^3 + 5s^2 + 5s + 8$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 5 & 8 \\
s^3 & 1 & 5 & \\
s^2 & 0 & 8 & \\
s^1 & & & \\
s^0 & & &
\end{array}
$$

Reemplazamos el 0 de la primera columna por f, donde $f \cong 0$, positivo.

De esta manera:

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 5 & 8 \\
s^3 & 1 & 5 & \\
s^2 & f & 8 & \\
s^1 & \frac{5f-8}{f} & & \\
s^0 & 8 & &
\end{array}
$$

y se calcula $\lim\limits_{f\to 0} = \frac{5f-8}{f} = \frac{-8}{0} = -\infty$

Con respecto a la primera columna, en este caso, presenta dos cambios de signo, pues quedaría 1, 1, 0, $-\infty$, 8.

6.9 Resumen

Hemos analizado la estabilidad de los sistemas de control, esto significa que si se aplica al sistema una entrada finita, entonces la salida también es una señal de magnitud finita. En ese contexto se analizará la disposición de los polos en la función de transferencia en lazo cerrado y el método de Routh-Hürwitz. Por otro lado, una vez que en el sistema se desvanecen los efectos transitorios originados durante el establecimiento de la señal de entrada se pasa al estado estable. Es en ese estado en el que se analizó el error que presenta el sistema. Este error especifica la medida de la exactitud del sistema de control para seguir las variaciones de la señal de entrada. Para este análisis, se clasificaron los distintos tipos de sistemas y se halló el error en estado estable cuando la señal de entrada es un escalón o una rampa.

7.1 Introducción

El controlador es un elemento que en un sistema de lazo cerrado se encuentra ubicado en el trayecto directo y tiene como entrada la señal de error. Su salida se convierte en la entrada al elemento corrector, como se indica en la figura 7-1.

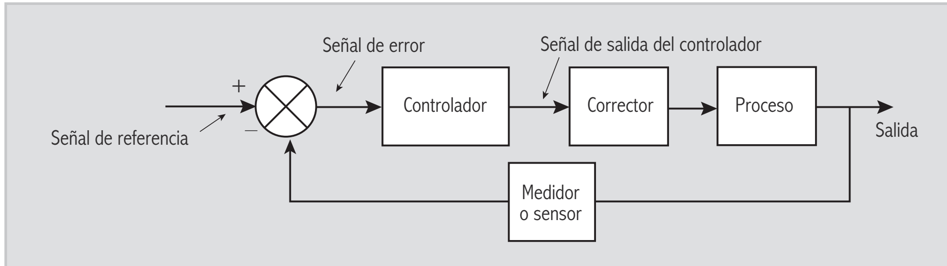


Fig. 7-1 Ubicación del controlador en un sistema de control de lazo cerrado.

7.2 Diferentes tipos de controladores

La relación entre la entrada y la salida del controlador se denomina "**ley de control**" y, de acuerdo con ella, éste puede ser:

- Proporcional
- Integral
- Derivativo
- Proporcional integral
- Proporcional derivativo

A continuación, analizaremos cada uno de los casos:

En el controlador proporcional la salida del mismo guarda una relación lineal con la entrada y la ganancia proporcional es suministrada por un amplificador electrónico, con ganancia ajustable.

7.2.1 Controlador proporcional

En este caso, el controlador proporcional puede ser un amplificador que tiene ganancia constante Gp, cuya salida está graficada en la figura 7-2.

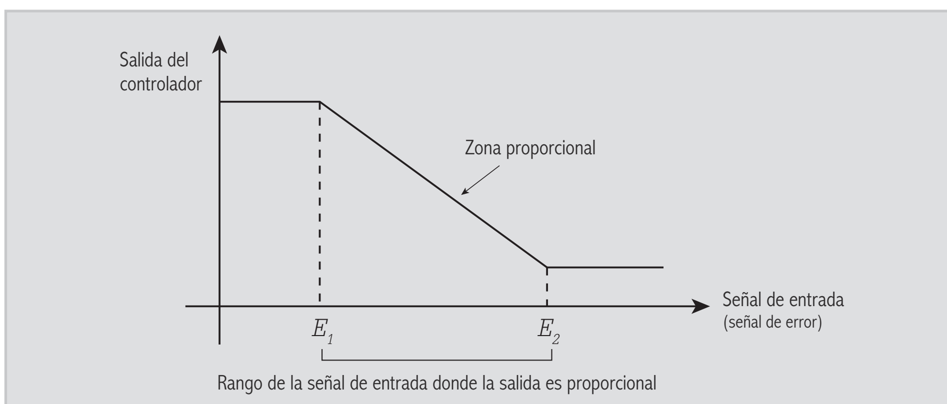


Fig. 7-2 Respuesta de un controlador proporcional.

Cabe aclarar que la ganancia constante o lineal se mantiene para un rango determinado de la señal de entrada, que, recordemos, es la señal de error en el sistema de control. En el gráfico de la figura 7-2, ese rango se extiende desde E1 a E2; fuera de él deja de ser proporcional. En la práctica, el amplificador puede ser un circuito electrónico o un sistema mecánico.

La desventaja principal de estos controladores es que no introducen un término integrador (de la forma 1/s) en la trayectoria directa. De acuerdo con los conceptos vistos en relación al error en estado estable de los sistemas, si el sistema es tipo 0, con el controlador proporcional no cambia y sigue siendo tipo 0; así, los errores en estado estable continúan. En la figura 7-3, se puede apreciar un ejemplo de controlador proporcional.

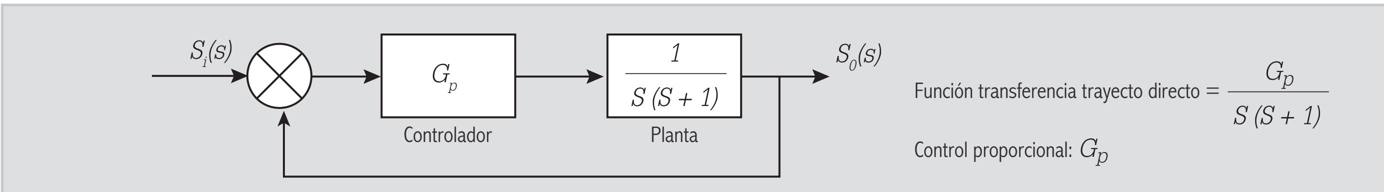


Fig. 7-3 Ejemplo de controlador proporcional.

$$T(s) = \frac{Gp}{s(s+1)} \qquad \text{función transferencia}$$

El sistema es tipo 1, si la entrada $S_i(s)$ es un escalón el error será:

$$E(s) = \lim_{S\to 0}\left[s\cdot\frac{1}{1+T(s)}\cdot S_i(s)\right]$$

donde $S_i(s) = \frac{1}{s}$; $T(s) = \frac{Gp}{S(s+1)}$ ∴

$$E(s) = \lim_{S\to 0}\left(s.\frac{1}{1+\frac{G_p}{s(s+1)}}\cdot\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

En general, si la entrada al controlador es una señal en forma de escalón, entonces la salida también lo es. El error es cero si el sistema es tipo uno y la entrada es un escalón.

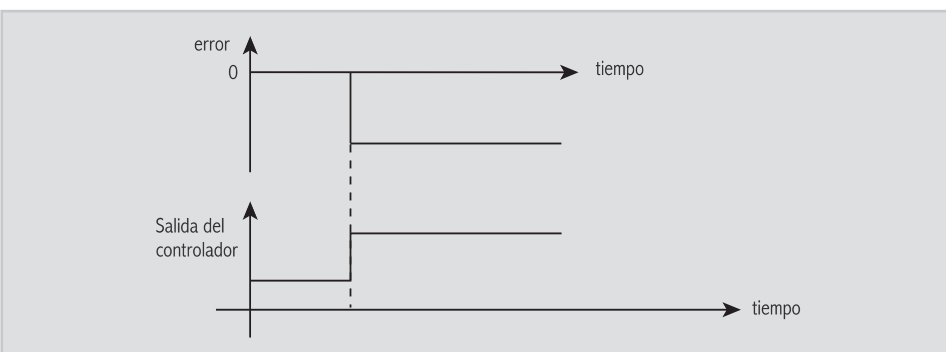


Fig. 7-4 Relación entrada-salida de un controlador proporcional.

7.2.2 Controlador integral

En los controladores integrales la salida del controlador es proporcional a la integral de la señal de error, como se indica en la figura 7-5.

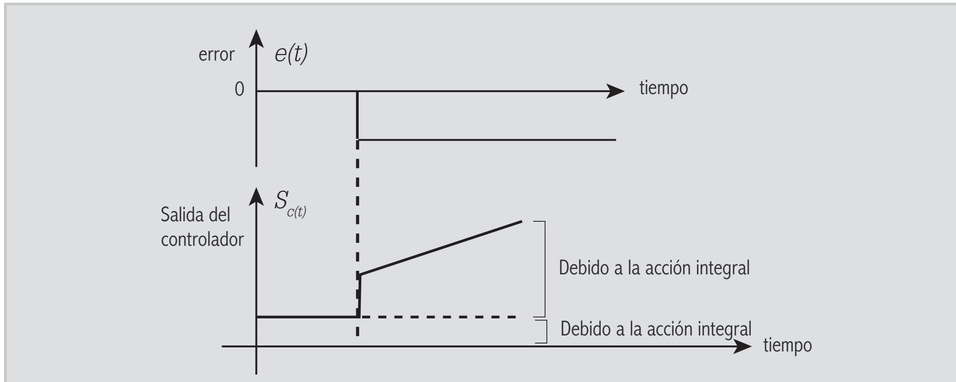


Fig. 7-5 Controlador integral.

$$S_c(t) = G_i \int_0^t e(t)\, dt$$

donde $e(t)$ es la entrada al controlador y $S_c(t)$ es la salida del controlador integral

$$S_c(s) = \frac{Gi}{s}$$

La salida del controlador integral depende de la integral de la señal de error que alimenta al controlador.

La Gi es la ganancia integral. La ventaja de este tipo de controlador es que introduce un término S en el denominador, por lo que incrementa el tipo de sistema en uno.

Por ejemplo, si se tiene una entrada escalón y el sistema es tipo 0, el error en estado estable desaparecerá cuando se presente el controlador integral. Recordemos que esto no ocurre cuando el controlador es proporcional. No obstante, la desventaja radica en que al introducir un polo en el origen se reduce la estabilidad relativa. En la figura 7-6, se detalla un ejemplo de controlador integral.

En función de la ecuación en el dominio del tiempo de un controlador de acción integral, hallar en el dominio de Laplace la función de transferencia y explicar cómo varía la salida del sistema. Justificar.

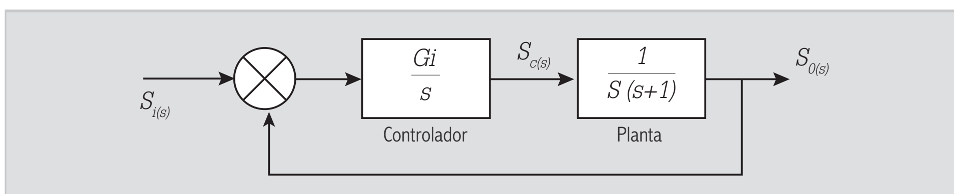


Fig. 7-6 Ejemplo de controlador integral.

$$T(s) = \frac{G_i}{s^2(s+1)}$$ Función transferencia

El sistema es tipo 2, si la entrada $Si(s)$ es un escalón el error será:

$$E(s) = \lim_{S\to 0}\left[s\cdot\frac{1}{1+T(s)}\cdot S_i(s)\right]$$

donde $S_i(s) = \dfrac{1}{s}$; $T(s) = \dfrac{G_i}{s^2(s+1)}$

$$E(s) = \lim_{S \to 0} \left(s \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{G_p}{s(s+1)}} \cdot \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Para una entrada escalón unitario el sistema tipo 2 tiene un error cero.

7.2.3 Controlador derivativo

En este tipo de controlador, la salida es proporcional a la derivada en función del tiempo de la señal del error que entra al controlador; si la ganancia derivativa es Gd, tiene unidades "s". En la figura 7-7, se puede observar que la salida del controlador es proporcional a la derivada de la señal de error.

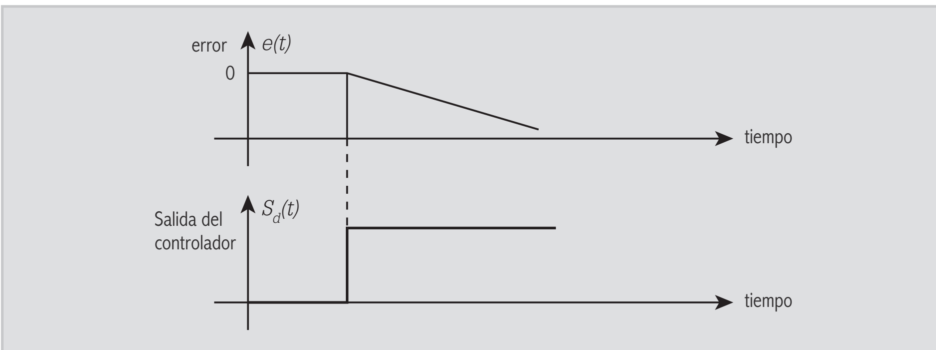


Fig. 7-7 Controlador derivativo.

La salida del controlador derivativo es proporcional a la rapidez con que cambia la señal de error y no por su valor.

$$S_c(t) = G_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$ Salida del controlador derivativo

donde $e(t)$= señal de error de entrada al controlador.

Si aplicamos la Transformada de Laplace a la función de transferencia de un controlador derivativo, nos queda como resultado:

$S_d(s) = G_d \cdot s$ Es la salida del controlador derivativo.

Y si la aplicamos a un sistema de lazo cerrado, como el indicado en la figura 7-8, obtenemos la siguiente expresión:

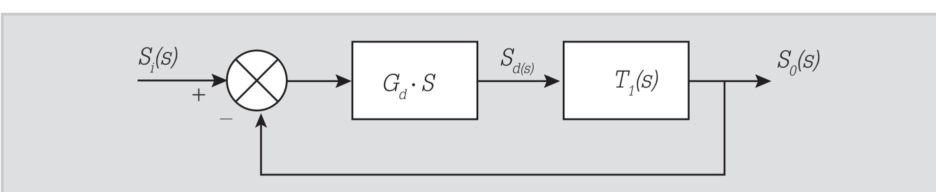


Fig. 7-8 Ejemplo de controlador derivativo.

$$T(s) = \frac{G_d \ \ S \ \ T_1(s)}{1 + G_d \cdot S \cdot T_1(s)}$$

En la figura anterior, se puede observar que cuando el error es constante y el controlador es derivativo no hay ninguna acción correctiva, lo cual no es conveniente; por otro lado, cuando el error responde a la función rampa (o sea que se incrementa su efecto en el tiempo), este controlador es eficaz porque produce una salida mucho mayor hacia el elemento corrector para compensar el incremento de la señal de error.

Si la función transferencia de la planta T(s) es tipo 1 o mayor, la aplicación de un controlador derivativo es contraproducente, porque reduce el orden en 1. No obstante, en la práctica éstos no se emplean en forma pura sino que se combinan con otros controladores. De esta forma, al usarlos combinados, se logra que la respuesta sea más rápida y eficiente.

7.2.4 Controlador proporcional integral

En la figura 7-9, se detalla un controlador proporcional integral. En ella se observa que se puede resolver el problema de la reducción de la estabilidad relativa originada por la introducción del controlador integral.

La salida del controlador proporcional integral combina las acciones de los controladores proporcionales e integrales obteniendo una respuesta más estable del sistema.

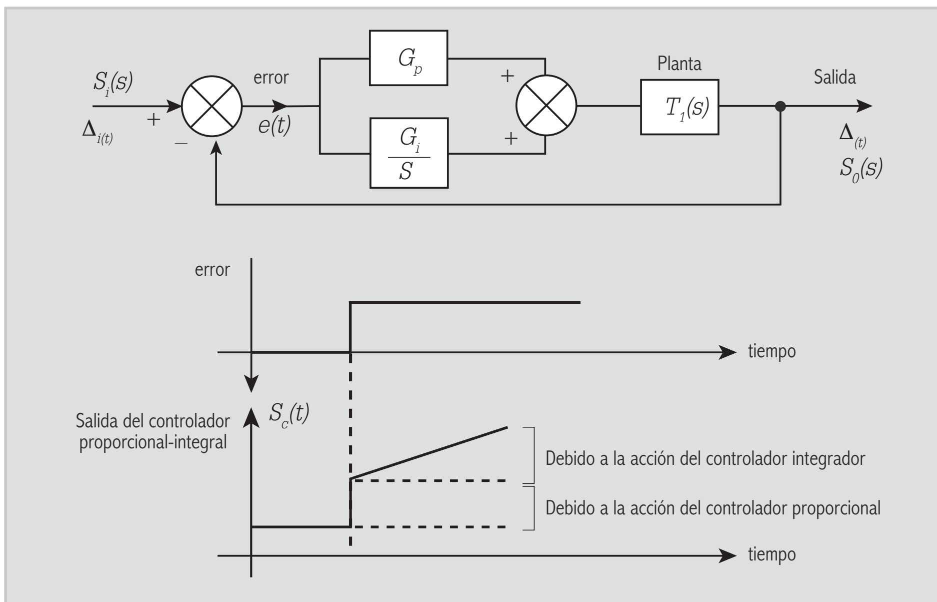


Fig. 7-9 Controlador proporcional integral.

Salida del circuito $\Delta(t) = Gp \cdot e(t) + G\,i \int_0^t e(t)dt$

pasando a la señal de salida $\rightarrow S_0(s) = \dfrac{Gp \cdot [s + (1/\frac{Gp}{Gi})]}{S}$ donde $\dfrac{Gp}{Gi}$ se denomina constante de tiempo integral

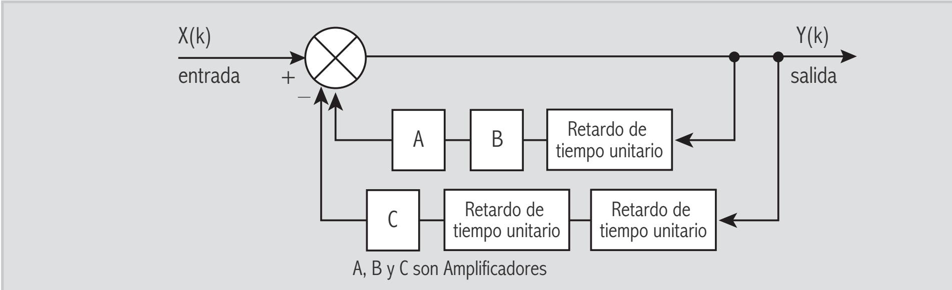


Fig. 8-4 Diagrama en bloques de sistema discreto.

La Transformada Z fue introducida por Salzer en 1954 y permitió que los resultados obtenidos en los sistemas de control continuos se pudieran aplicar a los sistemas que operan con tiempo discreto, como es el caso de las computadoras.

Solución: $Y(k) = X(k) - A \cdot B \cdot y\,(k-1) - C\,y\,(k-2)$

8.3 Introducción a la Transformada Z

Hemos visto que la ecuación de diferencias proporciona la relación entre la salida y la entrada para un sistema en tiempo discreto, pero analicemos a continuación la función que describe una secuencia de impulsos δ(t) , separados en tiempo T, las cuales las podemos considerar muestras resultantes del proceso de muestreo de un escalón unitario.

$$f^*(t) = f(0)\,\delta(t) + f(1)\,\delta(t-T) + f(2)\,\delta(t-2T) + \ldots + f(k)\,\delta(t-kT) \qquad (8\text{-}1)$$

donde:

$f^*(t)$ es la función que describe la secuencia de impulsos (función muestreada)

k es el valor de la muestra de la función para el instante k.

$\delta(t)$ es el impulso unitario para el instante $T=0$.

Si ahora hallamos la Transformada de Laplace de $f^*(t)$, tenemos:

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = F^*(s) = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot e^{-TS} + f(2) \cdot e^{-2TS} + \ldots + f(k) \cdot e^{-KTS} \qquad (8\text{-}2)$$

Recordar que $\mathcal{L}[\delta\,(t-T)\,] = 1 \cdot e^{-TS}$

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot e^{-KTS}$$

Si realizamos un cambio de variable: $Z = e^{TS}$,que equivale a $S = \frac{1}{T} \cdot \ln Z$, la ecuación 8.2 se puede escribir como:

$$Z\,[f(k)] = F(z) = f(0) + f(1) \cdot z^{-1} + f(2) \cdot z^{-2} + f(3) \cdot z^{-3} + \ldots + f(k) \cdot z^{-K} \qquad (8\text{-}3)$$

$F(z)$ se denomina la Transformada Z de la secuencia de impulsos, donde cada período de retardo da como resultado un impluso multiplicado por Z^{-1}.

8.4 Propiedades básicas de la Transformada Z

Enunciaremos a continuación aquellas propiedades y teoremas básicos de la Transformada Z que nos ayuden a poder modelizar adecuadamente los sistemas de control estudiados.

Para ello, suponemos en todos los casos que:

- La función $x\,(t)$ tiene Transformada Z, la cual se representa como $x\,(z)$.
- $x\,(t)$ es igual a cero para valores negativos de t.