Actividades y Lecturas complementarias Capítulo 4

Finalidad

El módulo didáctico de CalEst contempla una serie de escenarios para el cálculo de probabilidades (véase la figura 4.1E). La descripción está referida con juegos de azar, sin embargo mediante elaboración de prácticas se pueden relacionar con problemas de la vida real. La colección de unidades que contiene este módulo, tiene en cuenta el lanzamiento de monedas, de dados con diferente número de caras, de una moneda y un dado, árboles o ramificaciones, ruletas con diferentes divisiones, ruletas con divisiones aleatorias, extracción de canicas: con remplazo y sin remplazo. Esto permite abordar con amplitud el contenido temático de un curso de probabilidad, en los niveles medio y superior.
Se proponen una serie de lecturas para complementar las actividades de aprendizaje.

Actividades y Lecturas complementarias Capítulo 4

Ejemplos auxiliares de apoyo para el aprendizaje

En gran medida las actividades descritas para realizarse en este documento se basan en el uso del Calculador Estadístico: CalEst. La información de éste aparece en la página. http://www.calest.com/CalEst.aspx Vea la opción Apoyo Didáctico para seguir lecciones de probabilidad.

En referencia a situaciones cotidianas, los resultados de experimentos aleatorios de un fenómeno o problemas son: registrar el sexo de un bebé al nacer, anotar la preferencia de un cliente por la marca de un teléfono, registrar la opinión de una persona respecto a la píldora del día después, medir la concentración de oxígeno en un río contaminado, preguntar a una persona si es partidaria o no de consumir un determinado producto, conocer el estado de salud de una persona, el tiempo de vida de un tipo de lámpara, el tiempo de vida de un virus, el número de vehículos que pasan por una caseta durante un intervalo de 15 minutos.

Lecturas complementarias

Se proponen algunas lecturas con la finalidad de motivar el aprendizaje de la probabilidad y generar varias actividades para que realicen los estudiantes.

1. *Dados y Datos: Cómic hacia la estadística con probabilidad 0.95 de serlo*; Javier Cubrero; http:/ibae.caib.es
2. *Matemáticas .....¿Estás ahí? Episodio 2*; Adrián Paenza; Siglo XXI Editores, 2006. Ver capítulo 2
3. *Claudi Alsina, Vitaminas matemáticas. Ed. Ariel, México, 2010.* Sugerimos la lectura del capítulo 3, éste describe una visión entretenida del mundo de los datos y el azar.

4. *Arieh Ben-Naim. La Entropía Desvelada. Metatemas-Tusquets Editores México, 2011.* Es una descripción de la segunda ley de la termodinámica, sin emplear tecnicismos. Sin duda el libro cumple la misión de ampliar nuestro nivel cultural en los conceptos tratados en este capítulo. Entre otros temas presenta un resumen de la probabilidad capítulo 3 con aplicaciones. Como repaso es recomendable leer el capítulo 4 y 5.

5. *Ian Stewart. ¿Juega Dios a los Dados? booket ciencia (14). España , 2012.* También, la función es contribuir al nivel cultural sobre los temas estudiados. El libro proporciona una visión interesante del mundo y de la ciencia. La primera edición data de 1998, luego 1997.

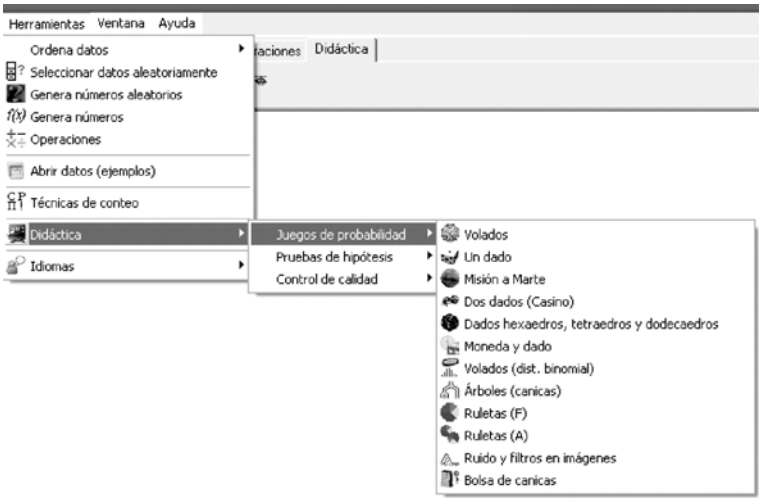

Figura 4.1E Descripción del módulo didáctico de **CalEst** para el cálculo de probabilidades.

Cálculo de probabilidades lanzando dados con diferentes números de caras

En la figura 4.2E se muestra una opción para el cálculo de probabilidades, en la que se tienen tres dados. Con el signo más (+) se consideran los dados que se lanzan. Así por ejemplo en esa figura se describe el lanzamiento de dos dados, uno de cuatro lados y otro de 12. Existen 48 posibilidades diferentes al lanzar estos dos dados, como se ve en la tabla A1.

Tabla A1 Suma al lanzar los dados de 4 y 12 caras.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

En la hoja se presenta el espacio muestra que indica la suma de los números que marcan los dados. En este caso se puede preguntar por la probabilidad de que la suma de los dados sea un número primo, es decir $P(la\ suma\ sea\ un\ número\ primo) = \frac{19}{48}$.

Usando estos dados se pueden organizar varias prácticas para el cálculo de probabilidades.

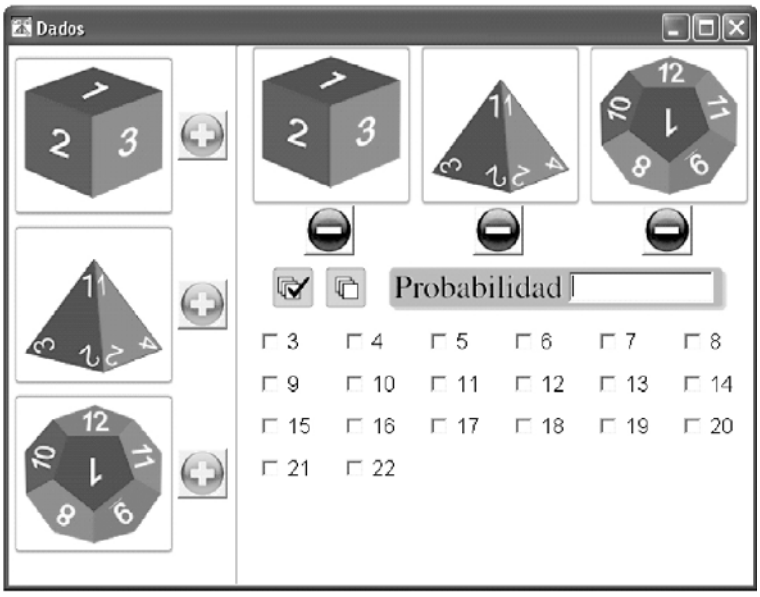

Figura 4.2E Lanzamiento de tres tipos de dados.

Nota: si se oprime el signo más (+) con el botón del mouse se activa un dado, mientras que si se oprime el signo menos se quita el dado.

Ejemplo 1 usando CalEst

Se lanza de manera independiente dos dados, el primero de 4 caras y el segundo de doce caras, en ambos casos se observa el número que cayó.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el primer dado muestre un número par? $P(\textit{número par})=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
- ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo muestre un número par? $P(\textit{número par})=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea impar? $P(\textit{número impar})=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$.

Ejercicio 1 usando CalEst

1. Se lanza un dado de seis caras. Encuentre la probabilidad en cada uno de los siguientes eventos: Evento A: cae un 3. Evento B: cae un número menor que 5. Evento C: cae un número impar. Evento D: cae un número primo.
2. Use el simulador de lanzamiento de dados en *CalEst*, sólo se pueden lanzar de 100 en 100. Si se lanza un dado, cien veces, mil veces, cinco mil veces escriba las frecuencias registradas y complete la tabla. ¿Qué puede concluir?

X	1	2	3	4	5	6
Frecuencia(100)						
Frecuencia(1000)						
Frecuencia(5000)						

Ejercicio 2 usando CalEst

Considere el experimento de lanzar un par de dados, suponga que X es la suma de los valores que marcan al caer. En la siguiente tabla se resumen los resultados y las probabilidades relacionadas.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X{=}x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

1. Use la opción de gráficas en el programa y trace el diagrama de barras para estos valores. Estime las probabilidades $P(X \geq 11)$, $P(5 \leq X \leq 7)$ y $P(X \leq 2)$.

2. Considere los eventos E *obtener una suma que sea un número par* y F *obtener una suma que sea un número primo*. Hallar la probabilidad $P(E \cup F)$ y $P(\overline{E \cup F})$.

3. Use el simulador de lanzamientos de dados en *CalEst*, sólo se pueden lanzar de 100 en 100. Si se lanza el par de dado, cien veces, mil veces, cinco mil veces, escriba las frecuencias registradas y complete la tabla. ¿Qué puede concluir?

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencia(100)												
Frecuencia(1000)												
Frecuencia(5000)												

Ejercicio 3 usando CalEst

El juego craps consiste en lanzar dos dados. De acuerdo con el ejercicio anterior, éste considera las reglas que a continuación se describen.

1. Si se obtiene una suma de 7 u 11 en la primera tirada, gana. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la primera tirada?
2. Si se obtiene una suma de 2, 3 o 12 en la primera tirada se pierde el juego. ¿Cuál es la probabilidad de perder en la primera tirada?
3. Si se obtiene una suma de 4, 5, 6, 7, 8, 9 o 10 en la primera tirada, ni se pierde ni se gana el juego. ¿Cuál es la probabilidad de que no se pierda ni se gane en la primera tirada?
4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de 1 en cualquier tirada?
5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma menor que 13 en cualquier tirada?
6. Si los dados se tiran 60 veces, estime cuántas veces se obtendrá una suma de 7.

Ejercicio 4 usando CalEst

Se lanzan dos dados y se calcula la diferencia entre los valores de mayor a menor, este cálculo se describe en la siguiente tabla:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

- **a)** Use la opción de gráficas en el programa y trace el diagrama de barras para estos valores. Estime las probabilidades $P(X \geq 5)$, $P(2 \leq X \leq 4)$ y $P(X \leq 1)$.
- **b)** Pedro y Pablo juegan a los dados y calculan la diferencia tal como se ha descrito. Pedro gana si la diferencia es 0, 1, o 2. Pablo gana si la diferencia es 3, 4 o 5. ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro gane? ¿Cuál es la probabilidad de que Pablo gane?

Ejercicio 5 usando CalEst

Se lanzan de manera independiente dos dados, el primero de 4 caras y el segundo de 6 caras; en ambos casos se observa el número que cayó. Complete la siguiente tabla de tal manera que en el segundo renglón se calcule la probabilidad de la suma de los valores que muestra cada dado.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x)$									

- ¿Cuál es la probabilidad de que el primer dado muestre un número par? $P(\text{número par})=$
- ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo muestre un número impar? $P(\text{número impar})=$
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma esté entre 4 y 8?

Ejercicio 6 usando CalEst

Se lanzan de manera independiente dos dados, el primero de 6 caras y el segundo de 12 caras; en ambos casos se observa el número que cayó. Complete la siguiente tabla tal que en el segundo renglón se calcule la probabilidad de la suma de los valores que muestra cada dado.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(X=x)$																	

- Sea E el evento que el primer dado sea mayor que 3, calcule $P(E)$.
- Sea F el evento que el segundo dado sea múltiplo de 3, calcule $P(F)$.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma esté entre 4 y 12?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea menor a 4 o mayor a 16?

Ejemplo 2 usando CalEst: cálculo de probabilidades lanzando un dado y una moneda

Una moneda (cara, sello) y un dado de seis caras son lanzados, figura 4.3E. Encontrar la probabilidad de obtener una cara al lanzar la moneda y que el dado caiga en seis. El espacio muestra es:

$$M = \{c1, c2, c3, c4, c5, c6, s1, s2, s3, s4, s5, s6)$$

Los eventos son A: salga cara y B: caiga un 6. La probabilidad de A es $P(A) = \frac{1}{2}$, y $P(B) = \frac{1}{6}$. Los eventos son independientes, entonces:

$$P(A \text{ y } B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \simeq 0.083$$

Así la probabilidad de que al lanzar la moneda salga cara y al tirar el dado marque 6 es aproximadamente 0.083.

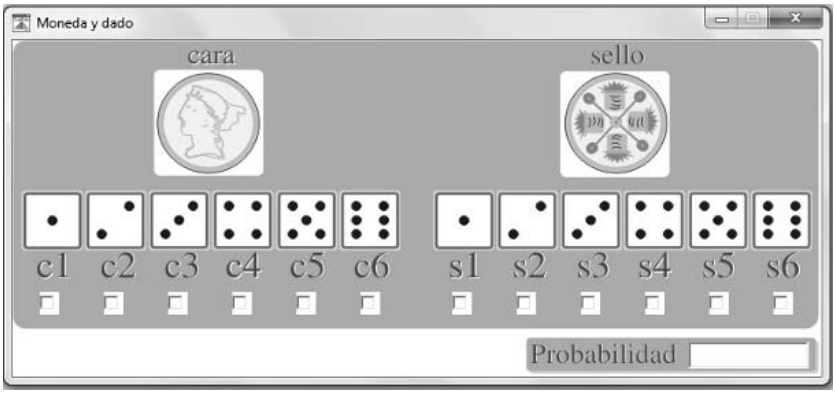

Figura 4.3E Espacio muestra y cálculo de probabilidades para una moneda y un dado.

Cálculo de probabilidad con ruletas

A continuación se presenta la posibilidad del cálculo de probabilidades usando ruletas. En la figura 4.4E se muestra la oportunidad de dividir dos ruletas con diferentes opciones, esto permite crear varias prácticas para obtener probabilidades con colores, números y letras. En la figura 4.4E se crean situaciones similares, pero además la división de los círculos se puede generar de manera aleatoria. En este caso se genera la frecuencia al girar las ruletas, lo que permite estudiar la regularidad estadística y así estimar probabilidades en términos de la frecuencia.

Ejemplo 3 usando CalEst

- ¿Cuál es la probabilidad de que ambas ruletas tengan el mismo color? Se tiene que se repiten 4 colores de 16 resultados posibles, entonces $P(E\text{: } mismo\ color) = \frac{4}{16} = 0.25$.
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las ruletas sea azul? En el espacio muestra se cuenta el número de renglones que tienen al menos un azul, de estos hay 7; así $P(F\text{: al menos una es azul}) = \frac{7}{16} = 0.4375$.
- Considere los números y las letras en la primer y segunda ruleta respectivamente, ahora se definen los eventos E como los números: $E = \{1, 2, 3, 4\}$, y el F como las letras: $F = \{A, B, C, D\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que al girar ambas ruletas la flecha marque un número par y una consonante? R: rojo y A: amarillo corresponden a los números pares y R: rojo, V: verde y A: amarillo se asocian a las consonantes.
  - De esa manera se tiene $H = \{(R, V), (A, A), (R, A), (A, R), (R, R), (A, V)\}$, de manera equivalente el evento H
  - se escribe por $H = \{(2, C), (4, D), (2, D), (4, B), (2, B), (4, C)\}$.
  - Entonces la probabilidad es 0.375, o sea $P(H) = 0.375$.

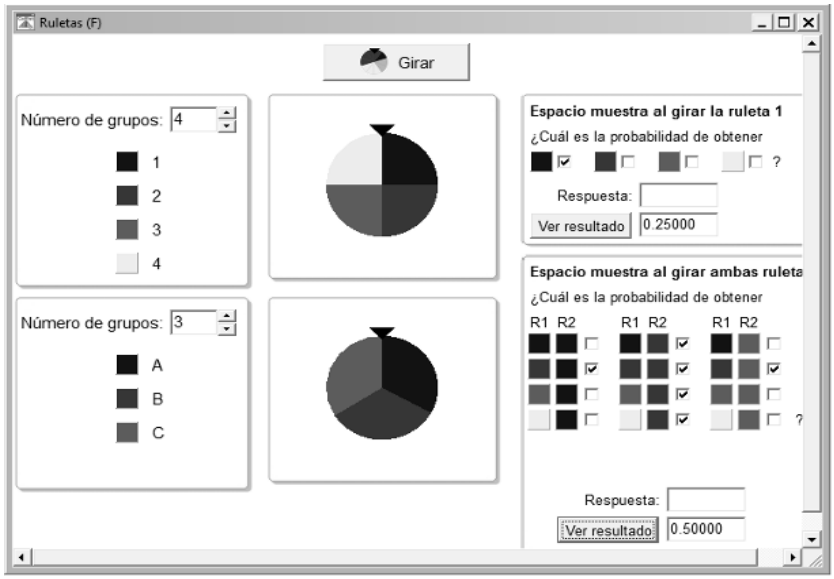

Figura 4.4E El caso de dos ruletas con cuatro colores, también se puede considerar el caso de la combinación de números y letras.

Ejercicio 7 usando CalEst

Use la opción de ruletas, considere sólo una de ellas y divida en nueve partes iguales. Tome en cuenta los números en cada color y sean los eventos, E: obtener un número par, y G: obtener un número divisible entre 3; es decir: $E = \{2, 4, 6, 8\}$, $G = \{3, 6, 9\}$. Calcule las siguientes probabilidades: a) $P(E \cup G)$, b) $P(E)$, c) $P(E \cap \overline{G})$, d) $P(\text{Factor de } 35)$, e) $P(6 \text{ o } 2)$.

Ejercicio 8 usando CalEst

Utilizar las ruletas de la opción 1 con cuatro grupos cada una de ellas. Supóngase que se asignan los valores 3 al azul, 4 al rojo, 5 al verde, 6 al amarillo. Se plantea construir una fracción, para ello realice el siguiente experimento: el valor que marque la flecha en la ruleta superior póngalo en el numerador y el valor que marque la otra ruleta póngalo en el denominador ¿Cuál es la probabilidad de que la fracción sea mayor que $\frac{3}{2}$?

Ejercicio 9 usando CalEst

Con las ruletas: un experimento consiste en girar la ruleta superior dividida en cuatro grupos. Considere los números 1, 2, 3 y 4, después gire la ruleta de abajo dividida en 2 grupos, donde el azul o letra A vale 1 y el rojo o letra B vale 2. ¿Cuál es la probabilidad de que: a) el número en la ruleta superior sea mayor que en la ruleta inferior, b) en ambas ruletas sea un número par, y c) el resultado sea dos enteros consecutivos en cualquier orden?

Ejercicio 10 usando CalEst

En referencia a las dos ruletas, se divide cada una de ellas en 3 grupos y a los colores se les asignan valores como se indica a continuación: en la ruleta de arriba los colores azul, verde y rojo valen 4, 8 y 6 respectivamente, de manera equivalente en la ruleta de abajo los colores azul, verde y rojo valen 10, 3 y 5. Se plantea realizar un juego, éste consiste en que la ruleta que tenga el número mayor gana. Si se desea ganar, ¿qué ruleta escogería? ¿Por qué?

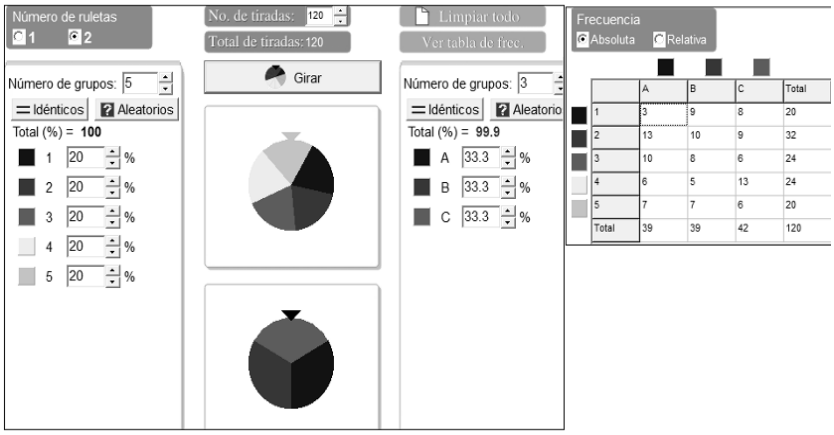

Figura 4.5E Ruletas con varias opciones para el cálculo de probabilidades.

Ejercicio 11 usando CalEst

La figura 4.5E muestra la división de dos ruletas en forma aleatoria, luego se giraron 120 veces cada una. Genere ésta en **CalEst** y vea la tabla de frecuencias para contestar las preguntas que se indican a continuación. Nota: si decide definir los porcentajes, después de dar cada valor oprima la tecla "enter".

1. ¿Cuál es la probabilidad que al girar ambas ruletas la flecha marque el color negro en la primera y el color verde en la segunda?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera ruleta no se detenga en el negro?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que en la segunda ruleta no pare en el verde?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas ruletas la flecha marque azul?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera ruleta se pare en amarillo o la segunda se detenga en verde?

Considere los números para la ruleta 1 y las letras para la ruleta 2. Nuevamente use la tabla de frecuencia y calcule las siguientes probabilidades. a) $P(1 \mid A)$. b) $P(A \mid 1)$. c) $P(5 \mid C)$. d) $P(B \mid D)$

Ejercicio 12 usando CalEst

Use esta segunda opción de ruletas en el programa, seleccione en la primera ruleta 2 grupos y en la segunda 3 grupos, en ambos casos idénticos.

1. Halle el espacio muestra para este experimento.
2. Calcule las siguientes probabilidades de que: a) La primera sea roja y la segunda amarilla. b) La segunda no sea amarilla. c) La primera sea azul y la segunda no sea amarilla. d) Ambas sean rojas.
3. Luego, en el número de tiradas vaya haciendo de cien en cien hasta completar quinientos, en cada caso observe la tabla de frecuencias y utilice la última para estimar las probabilidades. Estime la probabilidad, frecuencia de que: a) La primera sea roja y la segunda amarilla. b) La segunda no sea amarilla. c) La primera sea azul y la segunda no sea amarilla. d) Ambas sean rojas.
4. Compare sus resultados 2 y 3.

Ejercicio 13 usando CalEst

Con la segunda opción de ruletas, dibuje las siguientes: la superior con tres grupos, el azul con $\frac{5}{9}$, el rojo con $\frac{2}{9}$ y el verde con $\frac{2}{9}$. La segunda ruleta con dos grupos, el azul con $\frac{6}{11}$ y el rojo con $\frac{5}{11}$.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que al girar ambas ruletas la flecha se detenga en azul?
2. ¿En cuál de ellas hay mayor posibilidad de que la flecha marque azul?
3. Gire varias veces la ruleta, digamos unas 600 veces, y vea la tabla de frecuencia. ¿Qué ruleta tiene mayor posibilidad de ganar con el azul?

Ejercicio 14 usando CalEst

Utilizando la segunda opción de las ruletas simule la situación de lanzar dos dados, es decir, divida las ruletas en 6 partes iguales cada una. Luego gire varias veces de cien en cien y vea las frecuencias generadas, compare estos resultados con el lanzamiento de los datos. En este caso se pueden buscar varias situaciones para generar cálculo de probabilidades. Por ejemplo, la probabilidad de que una de las ruletas sea roja y la otra azul, o una azul y la otra roja, equivale a la probabilidad de que la suma de los dados sea tres.

Probabilidades usando ramificaciones

Se presenta una serie de ramificaciones para el cálculo de probabilidades, en cada caso se aplica la estimación de probabilidades aplicando las definiciones tanto clásica como frecuentista (figura 4.6E). En esta figura se muestra una entrada con tres salidas, en la primera división la canica tiene una probabilidad de continuar de $\frac{1}{2}$, este valor prevalece si va por la rama de la derecha, por la izquierda se encuentra con otra ramificación; de nuevo la probabilidad es $\frac{1}{2}$, entonces la

probabilidad de salida por algunas de esas ramas 1 o 2 es: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. En la ilustración de la figura 4.23 se lanzaron 300 canicas, 79 salieron por la rama 1, 77 por la rama 2 y 144 por la rama 3, así: $\frac{79}{300} = 0.2633(26.33\,\%)$, $\frac{73}{300} = 0.2567(25.67\,\%)$ y $\frac{144}{300} = 0.48(48\,\%)$. Estos resultados tienden al valor de la probabilidad cuando n es cada vez más grande.

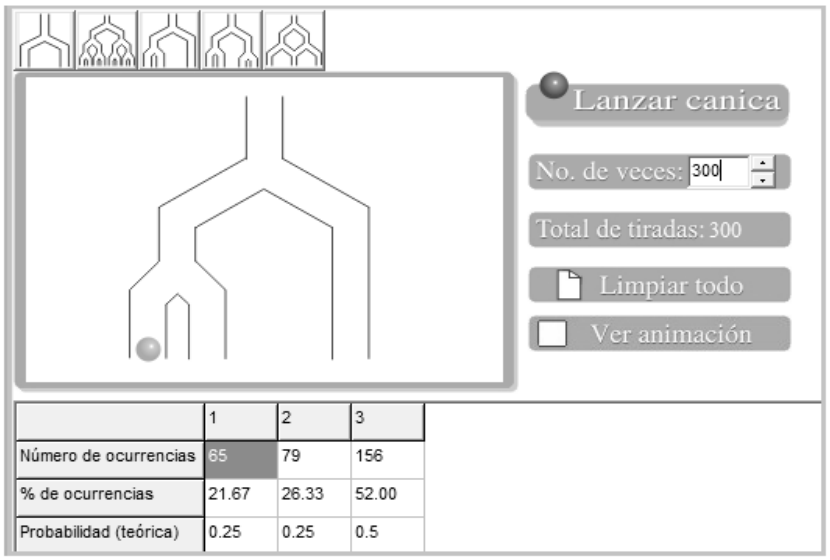

Figura 4.6E Opciones de cálculo usando árboles o ramas.

Ejercicio 15 usando CalEst

1. Simule salidas por los 5 árboles diferentes y estime el porcentaje de éstas al lanzar la canica 300, 1000, 2500, 5000 veces. ¿Qué observa?
2. Calcule la probabilidad de salida en cada unos de los árboles.

Probabilidades mediante extracción de canicas

El cálculo de probabilidades mediante la extracción de canicas, o bolas, es un problema clásico. Bajo este sistema se genera una buena cantidad de ejemplos para ilustrar las reglas de probabilidad y situaciones diferentes. Se ha simulado un mecanismo mediante el cual se pueden extraer canicas con cuatro colores distintos, se consideran los casos de reemplazo y sin reemplazo. Un número de canicas se puede seleccionar en cuatro selecciones posibles, se puede ir de lo más sencillo a lo más complejo. Una vez planteado un problema se realiza la extracción de un número establecido de canicas con reemplazo o sin reemplazo; de esa manera el usuario puede indicar de qué color serán las canicas que extraerá. Según el planteamiento, el usuario puede dar su resultado y luego confirmarlo con la solución que se proporciona en el programa de opciones didácticas: bolsa de canicas. Antes de dar el resultado se puede consultar el espacio muestra que se proporciona, de manera compacta, como una alternativa. En los siguientes ejemplos se describen algunos casos posibles para usar las bolsas de canicas, figura 4.7E. Con canicas de dos colores se puede simular el espacio muestra para los casos en que la variable aleatoria de respuesta tiene dos valores: éxito y fracaso, o defecto y no defecto. Así por ejemplo al lanzar dos monedas tres veces se puede tener tres canicas amarillas y tres rojas, con el amarillo representar

la cara en la moneda y con el rojo el sello. El número de extracción son tres canicas y calcular la probabilidad de que caiga al menos una cara es equivalente a observar al menos una canica amarilla. Estas ideas se pueden llevar al plano de problemas reales.

Ejercicio 15E usando CalEst

Javier invitó a tres amigos a jugar Wii. Cada uno de ellos llevaba una gorra, al entrar se la quitaron y la pusieron en una silla. Cuando terminaron de jugar, Javier les dió una gorra, al azar, a cada uno de sus amigos. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres recibieron su gorra? Para resolver este ejemplo se usará la bolsa de canicas que viene en el grupo Didáctica del programa. Ahí escogemos tres canicas como se muestra en la figura 4.7CE a la izquierda para representar cada una de las gorras.

Sugerencia para usar esta opción: aparece el número de canicas a extraer sin reemplazo o con reemplazo. Por ejemplo, si selecciona extraer 3 canicas, aparecerán tres signos de interrogación, esto le permite seleccionar una de las posibles alternativas. Aparece la elección para que usted dé su respuesta o para ver la probabilidad que se describe en el cuadro del resultado. La opción de espacio muestra, en este caso, indica todas las posibilidades de seleccionar el número de canicas que se pueden sacar. Para el ejemplo de las 3 canicas éste se describe a la derecha de la figura 4.7E, la extracción se hizo sin remplazo. Primero usted puede dar su respuesta de probabilidad y luego compararla al aplicar la opción Ver probabilidades, éstas se presentan en el cuadro de resultados.

La probabilidad de que los tres amigos recibieron su gorra es $\frac{1}{6} = 0.167$. Razonamiento: suponga que A: canica azul (gorra amigo 1), R: canica roja (gorra amigo 2) y V: canica verde (gorra amigo 3). En la primera extracción cada una de las tres canicas tienen la misma posibilidad de salir, una vez seleccionada una de éstas en la segunda sólo hay dos canicas; finalmente en la tercera sólo una se puede escoger, situación que se describe en la figura 4.8E.

Figura 4.7E Bolsa de canicas y cálculo de probabilidades izquierda, número de posibilidades derecha.

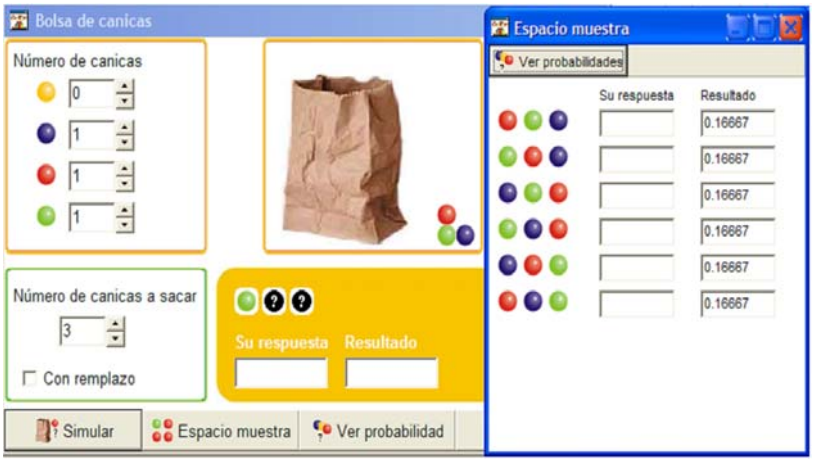

Figura 4.7CE Bolsa de canicas para resolver el caso de las gorras.

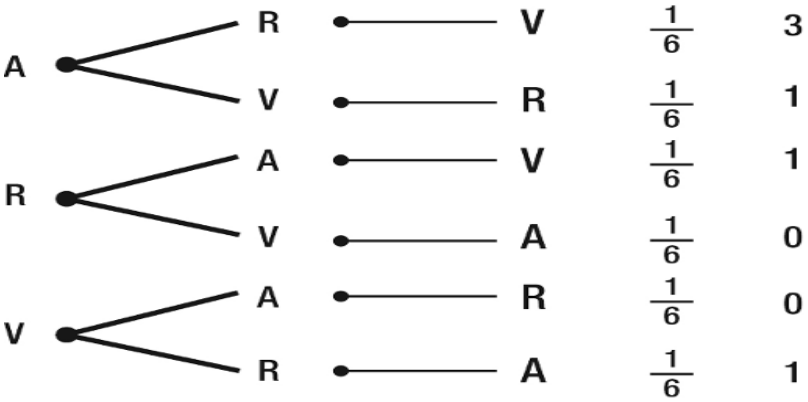

Figura 4.8E ARV todos reciben su gorra ($\frac{1}{6}$), al menos uno tiene su gorra ($\frac{3}{6}$), o nadie tiene la gorra que traía ($\frac{2}{6}$).

Ejercicio 16 usando CalEst

Se tiene una bolsa con tres canicas de color: A: azul, R: rojo, V: verde. Considere un experimento en dos etapas como sigue: se extrae una canica de la bolsa y se registra el color. Después se repone la canica en la bolsa, se hace una segunda extracción y se registra su color. Haga un diagrama de árbol para representar esta situación, verifique sus resultados con los presentados en el espacio muestra descrito en **CalEst**.

Determinar la probabilidad de que: a) ambas canicas sean rojas, b) ninguna canica sea roja, c) al menos una canica sea roja, d) a lo sumo una canica sea roja, e) ambas canicas sean del mismo color.

Ejercicio 17 usando CalEst

Una bolsa contiene 5 canicas amarillas y 10 canicas rojas. Se extraen dos canicas al azar, una después de otra sin remplazo. ¿Cuáles son los posibles resultados de este experimento? ¿Cuál es la probabilidad de que se extraigan dos canicas amarillas? Puesto que las canicas se extraen al azar, todas las canicas de la bolsa tienen la misma probabilidad de salir en cualquier extracción. Hay 15 canicas $P(1er.$ canica amarilla$) = \frac{5}{15}$, $P(2da.$ canica amarilla$|$ $1era.$ canica amarilla$) = \frac{4}{14}$

Solución

Usando la opción Canicas en el programa, se tiene:

$$\{(A,A),(A,R),(R,A),(R,R)\}$$

$$\begin{aligned} P(A,A) &= P(1er.\text{ canica amarilla}) \times P(2da.\text{ canica amarilla} \mid 1er.\text{canica amarilla}) = \\ \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21} \end{aligned}$$

¿Cuáles son las probabilidades $P(A,R)$, $P(R,A)$; $P(R,A)$ y $P(R,R)$?
¿Cuáles son las probabilidades $P(A,A)$, $P(A,R)$; $P(R,A)$ y $P(R,R)$?
Si la extracción es con remplazo:
¿Cuáles son las probabilidades $P(A,R)$, $P(R,A)$; $P(R,A)$ y $P(R,R)$?
¿Cuáles son las probabilidades $P(A,A)$, $P(A,R)$; $P(R,A)$ y $P(R,R)$?

Ejercicio 18 usando CalEst

Suponga que tiene dos bolsas. La primera contiene 3 canicas azules, 2 canicas rojas y 1 canica verde. La segunda bolsa contiene 4 canicas rojas, 2 canicas verdes y ninguna azul. Además se tiene un dado de seis caras.
Haga el siguiente experimento: lance el dado, si éste cae 1 o 6 saque una canica de la bolsa 1. En caso contrario saque una canica de la bolsa 2.
Complete las probabilidades en la siguiente tabla:

			Color canica		
		Azul	Roja	Verde	Suma
Bolsa	1	?	?	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
Bolsa	2	0	$\frac{4}{9}$	?	?
Suma		$\frac{1}{6}$	?	?	1

¿Cuál es la probabilidad de que venga de la bolsa 1, si la canica es roja, es decir: $P(\text{bolsa } 1 \mid R)$?

Encuentre las siguientes probabilidades condicionales: a) $P(\text{bolsa } 2 \mid R)$, b) $P(\text{bolsa } 1 \mid A)$, c) $P(\text{bolsa } 2 \mid \text{Azul})$, d) $P(\text{bolsa } 2 \mid V)$.

Ejercicio 19 usando CalEst

Una bolsa contiene 3 canicas rojas, 4 canicas azules y 5 canicas verdes.

1. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar una canica roja?
2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar una canica que no sea roja?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que la canica sacada al azar sea azul o verde?

Ejercicio 20 usando CalEst

1. Considere el problema de extraer dos canicas al azar, sin remplazo, de una bolsa que contiene dos canicas rojas y tres amarillas. Liste el espacio muestra y los resultados de los siguientes tres eventos: $A = \{$ambas canicas son rojas$\}$, $B = \{$la primer canica es roja y la segunda canica es amarilla$\}$ y $C = \{$una de la canicas es roja$\}$. Encuentre la probabilidad de cada uno de los eventos A, B y C.
2. Suponga, una bolsa contiene 3 canicas rojas y 2 verdes. Se toman 3 canicas sacando una a una sin remplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 sean rojas? Idea: defina los eventos $A_{1:}$ la primer canica es roja. $A_{2:}$ la segunda canica es roja y $A_{3:}$ la tercer canica es roja. Entonces calcule: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Ejercicio 21 usando CalEst

De una urna que contiene 6 pelotas blancas y 5 negras se toman dos pelotas en forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que una de las pelotas tomadas sea blanca y la otra negra?
$\frac{6\times5}{110} + \frac{5\times6}{110} = 0.2727 + 0.2727 = 0.5454$ o $\frac{6\times5}{11.10} = \frac{30+30}{110} = \frac{6}{11}$

Solución

Hay 11 pelotas, si se saca una quedan 10; así el número de posibilidades diferentes de extraer una o dos bolas es: $11 \times 10 = 110$
Se puede generar una serie de problemas previos para que los estudiantes puedan deducir estos resultados.

Principios básicos de conteo

Existen varias técnicas para contar el número de las diferentes maneras en las que un evento puede ocurrir. Una de ellas es el principio básico de conteo. Se puede usar este principio para encontrar el número de las diferentes maneras en que dos o más eventos pueden ocurrir. En el grupo Herramientas de **CalEst** se presenta la opción para realizar los cálculos de estos principios, como se muestra en la figura 4.9E.

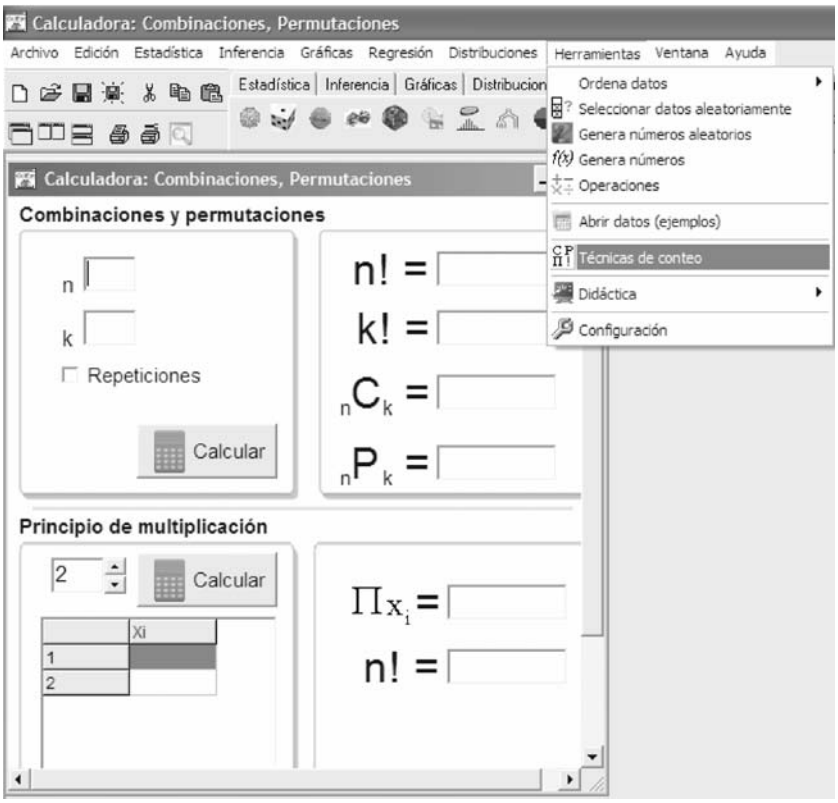

Figura 4.9E Opciones para usar los principios básicos de conteo.

Principio básico de conteo

Se van a realizar 2 experimentos, de tal manera que el primero puede tener cualquiera de n_1 resultados posibles. Si para cada uno de estos n_1 resultados posibles hay para el segundo experimento n_2 resultados posibles, entonces hay un total $n_1 \times n_2$ resultados posibles en los 2 experimentos. Esta regla se puede extender para m experimentos, así hay un total de $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$ resultados posibles.

Ejemplo 5 usando CalEst

1. Un restaurante de comida rápida vende helados de tres marcas comerciales diferentes (mc_1, mc_2, mc_3), en dos tamaños de cono (pequeño y grande) y cuatro sabores diferentes (chocolate, vainilla, fresa y limón) ¿De cuántas maneras diferentes se puede comprar un helado?

$$n_1 \times n_2 \times n_3 = 3 \times 2 \times 4 = 24$$

2. Las placas para que un automóvil pueda circular en un estado están compuestas por tres letras y cuatro números, las cuales están ordenadas de la siguiente forma: la primera letra es fija, en la segunda posición se tienen seis letras y veintidós en la tercer letra. Si en el primer número no puede ir el cero, ¿cuántas placas se tienen?

$$1 \times 6 \times 22 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 1188000$$

Nota: Esta es la presentación que aparece en **CalEst** para aplicar las técnicas de conteo. Cuando se llenan las casillas calcula todas las técnicas, por lo tanto entonces se selecciona sólo la que se tiene interés. En la figura 4.10E se describe el cálculo usando el principio básico de conteo (principio de multiplicación). Asimismo se ilustra el caso de las placas y a la vez aparece el cálculo del factorial, en este caso el de 7.

3. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar las letras A, B, C? Se puede aplicar el principio básico de conteo para determinar el número de las diferentes maneras en que n objetos se pueden acomodar en orden. Así:

$$ABC,\ ACB,\ BAC,\ BCA,\ CAB \text{ y } CBA$$

En este caso se dice que hay 6 posibles permutaciones para un conjunto de 3 objetos, aplicando el principio básico: el primer objeto de la permutación puede ser cualquiera de los 3, el segundo objeto puede ser cualquiera de los 2 restantes y el tercer objeto es el que falta. De esa manera existen $3 \times 2 \times 1 =$ permutaciones posibles. En general para n objetos se tiene:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$$

Esta opción se conoce como n *factorial* y se denota por $n!$.

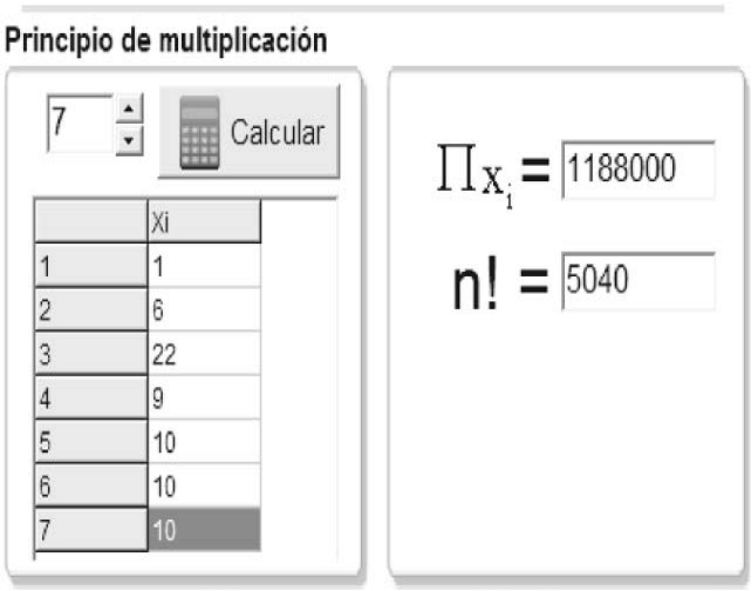

Figura 4.10E Principio de multiplicación para el ejemplo del número de placas.

Permutación

Una importante aplicación del principio de conteo es la determinación del número de maneras diferentes en que m objetos se pueden arreglar en orden o en permutaciones.

Una permutación es un arreglo ordenado de objetos. El número de diferentes permutaciones de n objetos distintos es $n!$

Si se desea escoger algunos de los objetos en un grupo y ordenarlos, a ese ordenamiento se le llama *permutación de n objetos tomados k veces.*

Permutación de n objetos tomando k a la vez

El número de permutaciones de n objetos distintos tomando n a la vez es:

$$_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

donde $k \leq n$

Ejemplo 6 usando CalEst

1. Encontrar el número de maneras diferentes de formar un código de tres dígitos en el que ningúno se repite.

Solución

Para formar un código de tres dígitos sin que ninguno de ellos se repita se necesita seleccionar 3 dígitos de un grupo de 10, así $n = 10$ y $k = 3$, se sustituye en ${}_nP_k$.

$$ {}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 720 $$

2. De los 20 autos que compiten en una carrera de Fórmula 1. ¿De cuántas maneras distintas pueden finalizar primero, segundo y tercero?

Solución

En este caso $n = 20$ y $k = 3$, ilustrado en la parte superior de la figura 4.11E.

$$ {}_{20}P_3 = \frac{20!}{(20-3)!} = 6840 $$

Combinaciones

A continuación se presenta otra técnica en el conteo, cuya característica es que no considera el orden de selección.

Combinación de n objetos tomando k a la vez

Una combinación es una selección de k objetos de un grupo de n objetos sin considerar el orden y se denota por ${}_nC_k$. El número de combinaciones de k objetos seleccionados de un grupo de n es

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} $$

o bien

$$ {}_nC_k = \binom{n}{k} $$

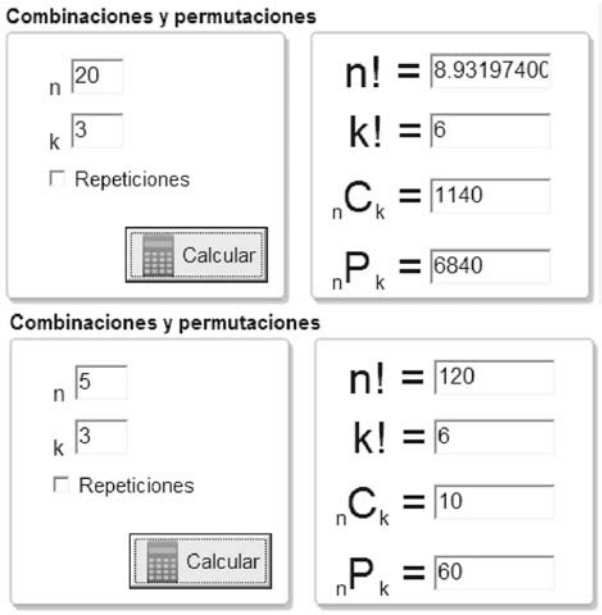

Figura 4.11E Cálculos para la permutación y combinación.

Ejemplo 7 usando CalEst

Se desea comprar 3 CDs de una selección de 5 para fijar ideas denote los CDs por A, B, C, D y E.

Solución

ABC, ABD, ABE
ACD, ACE
ADE
BCD, BCE
BDE
CDE
Observe que es lo mismo seleccionar ABC que BAC, así en los demás casos. El cálculo se muestra en la parte inferior de la figura 4.10E.

$$ {}_5C_3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10 $$

Aplicaciones del principio de Conteos

Ejemplo 8 usando CalEst

Encontrar la probabilidad de que sea n seleccionado 5 diamantes en un juego de cartas en una partida de póker. El espacio muestra es ${}_{52}C_5$ y el evento es ${}_{13}C_5$, entonces la probabilidad de un diamante es:

$$ P(\text{diamante}) = \frac{{}_{13}C_5}{{}_{52}C_5} = \frac{1285}{2\ 598\ 960} $$

Ejemplo 9 usando CalEst

Un subdirector de una escuela ha recibido una lista de 12 alumnos distinguidos por su buen rendimiento escolar. Tiene que seleccionar 4 estudiantes para formar un comité de representación. La lista está compuesta por 5 mujeres y 7 hombres.

1. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 4 estudiantes de la lista de 12?
2. ¿Cuántas posibles selecciones incluyen 1 hombre y 3 mujeres?
3. Si el proceso de selección es aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que 1 hombre y 3 mujeres sean seleccionados?

Solución

1. El número de maneras en que 4 estudiantes se pueden seleccionar de la lista de 12 es:

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!8!} = 495$$

2. Un hombre se puede escoger en $\binom{7}{1} = 7$ maneras y 3 mujeres se pueden escoger en $\binom{5}{3} = 10$. Cada uno de los 7 hombres puede acompañar a cada una de las 10 seleccionadas de 3 mujeres. Razonando por la regla de conteo $m \times n$, se concluye que el número posible de muestras es:

$$\binom{7}{1} \times \binom{5}{3} = 7 \times 10 = 70$$

3. Suponga que las 495 maneras posibles son igualmente probables. De estos 70 son casos favorables para el evento $A = \{1 \text{ estudiante es hombre y 3 son mujeres}\}$, así:

$$P(A) = \frac{70}{495} = \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{10}{32} = 0.3125$$