

Actividades y Lecturas complementarias Capítulo 6

Opción para obtener la distribución normal

En www.calest.com en Herramientas tiene la opción de obtener la distribución normal y estudiarla, así como calcular valores de la normal. Lo que será un importante apoyo didáctico, sin recurrir al vicio de las llamadas tablas de la normal. Esta opción es una base importante en este capítulo. También puede usar las Herramientas para el cálculo de probabilidades de otras distribuciones descritas en el capítulo.

Asimismo puede recurrir a la opción de Apoyo Didáctico para ver otras ideas sobre los conceptos del capítulo.

Finalidad

Se plantean una serie de actividades para que los estudiantes generen datos. Se propone resolver un rompecabezas del mapa de la República Mexicana, se le puede dar el enfoque administrativo económico. Estas ideas se pueden extender a otros países o América Latina. Varias actividades se plantean con temas relacionados con la economía y habilidades de percepción. Con la información generada se puede construir un curso de estadística.

Se proponen una serie de lecturas que, principalmente, se pueden obtener por internet. Ellas se irán actualizando.

Actividades y Lecturas complementarias Capítulo 6

Rompecabezas del mapa de la República Mexicana (retomado del capítulo 1)

Se desea conocer qué tanto conocen los estudiantes o mexicanos la República Mexicana, para ello se plantea la solución de un rompecabezas sobre el mapa de la división geopolítica de México, éste se presenta de un modo animado por computadora. El objetivo es arrastrar con el ratón el estado que aparece de manera aleatoria a la izquierda y colocarlo en el lugar que corresponde. Las respuestas que se generan al completar el mapa son el tiempo de solución y el porcentaje de fallas. El mapa se encuentra en el siguiente sitio: <http://www.calest.com> ir a la opción apoyo Didáctico.

Actividades

1. ¿Qué tanto conocen los alumnos de secundaria la ubicación de cada estado de la República Mexicana? Determinar el porcentaje de falla
2. ¿Qué tan eficientes son los alumnos para ubicar cada estado de la República Mexicana? Tiempo de respuesta
3. ¿Qué tanto recuerdan las personas la ubicación de cada estado de la República Mexicana?
4. ¿Qué tan eficientes son los alumnos de diferentes grados académicos para ubicar cada estado de la República Mexicana?

5. Si el tiempo de respuesta es alto y el número de fallas es grande. ¿Qué estrategias se pueden seguir para mejorar el conocimiento? ¿Son eficientes las estrategias?

Práctica 1. Como una alternativa auxiliar, use el CalEst

Si el tiempo de respuesta tiene una distribución normal con media 240 y desviación estándar 35.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona arme el rompecabezas en menos de 180 segundos?
2. Si calcula el área de la derecha del valor de 180 segundos. ¿Cómo la interpreta?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tarde más de 300 segundos? ¿Qué observa si mueve el cursor de la izquierda a la derecha?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tarde entre 180 y 300 segundos? Use el cursor en cada umbral. Al mover el cursor a la derecha, ¿Qué observa?

Práctica 2. Como una alternativa auxiliar, use el CalEst

Use la distribución de probabilidad de una normal con media 240 segundos y desviación estándar de 50. Variable aleatoria: tiempo de respuesta.

1. Ponga el umbral en 180, use la opción del umbral a la izquierda ¿qué observa?
2. Calcule el área que observa a la izquierda y escriba en símbolos la expresión que represente área
3. ¿Qué observa si mueve el cursor a la derecha o a la izquierda?
4. ¿Cuál es el valor de esa área? ¿Cómo se calcula? ¿Hasta dónde llega el cursor?
5. Si calcula el área de la derecha del valor de 180 segundos. ¿Cómo la interpreta?
6. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tarde más de 300 segundos? ¿Qué observa si mueve el cursor a la izquierda a la derecha?
7. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tarde entre 180 y 300 segundos? Use el cursor en cada umbral. Al mover el cursor a la derecha, ¿Qué observa?
8. Compare con la práctica 1 ¿qué observa? Describa sus observaciones y obtenga conclusiones

Práctica 3. Como una alternativa auxiliar, use el CalEst

Use la distribución de probabilidad de una normal con media 240 segundos y desviación estándar de 25. Variable aleatoria: tiempo de respuesta.

1. Ponga el umbral en 180, use la opción del umbral a la izquierda ¿qué observa?
2. Calcule el área que observa a la izquierda y escriba en símbolos la expresión que represente esta área. Interprete.

3. Si calcula el área de la derecha del valor de 180 segundos. ¿Cómo la interpreta? Escríbala en símbolos
4. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tarde más de 300 segundos? Exprésela en símbolos ¿Qué observa si mueve el cursor de la izquierda a la derecha?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tarde entre 180 y 300 segundos? Use el cursor en cada umbral. Exprésela en símbolos. Al mover el cursor a la derecha, ¿Qué observa?
6. Compare con las práctica 1 y 2 ¿qué observa? Describa sus observaciones y obtenga conclusiones

Actividades

1. X : Tiempo de respuesta en la resolución del rompecabezas de la RM, segundos. Densidad normal con media 210 y desviación estándar 20.
 - a) Calcule **a)** $P(X \leq 230)$; **b)** $P(X \geq 250)$; **c)** $P(185 \leq X \leq 240)$; **d)** $1 - P(X \leq 210)$
 - b) Dado el valor de la probabilidad calcule los valores de la variable X : **a)** $P(X \leq x_1) = 0.10$ **b)** $P(X \geq x_2) = 0.25$; **c)** $P(x_3 \leq X \leq x_4) = 0.51$; **d)** $1 - P(X \leq x_5) = 0.68$
2. X : tiempo de respuesta en la resolución del rompecabezas de la RM, en segundos. Densidad normal con media 210 y desviación estándar 20. Se aplicó este rompecabezas a 200 estudiantes. Complete la siguiente tabla para saber acerca del conocimiento de la república mexicana que tienen los estudiantes. Escriba la variable aleatoria.

Resultado de la solución	Nivel de conocimiento	Numero de estudiantes	Porcentaje que está en ese nivel
250 y más	Malo		
230 y menos de 250	Poco		
190 y menos de 230	Regular		
170 y menos de 190	Bueno		
Debajo de 170	Muy bueno		

3. Las puntuaciones en inteligencia siguen una distribución normal, con media 100 y desviación estándar de 15. Aproximadamente dos de cada tres personas arroja una puntuación entre 85 y 115, mientras que el 19 de cada 20 personas tiene una puntuación entre 70 y 130. Una persona con una puntuación de 130 es considerada generalmente en el pronóstico de dotado, mientras que una puntuación inferior a 70 generalmente apunta a una deficiencia.

Mediciones del CI la solución	Interpretación	Porcentaje que está en ese nivel
130 y más	Dotado	
115 y menos de 130	?	
85 y menos de 115	?	
70 y menos de 85	?	
Debajo de 70	Deficiente	

Nota. Se conoce como la escala de inteligencia Binet, quien la propuso a principios del siglo XX. Sin embargo, en años recientes se ha originado una gran controversia sobre lo que miden las pruebas de inteligencia.

Distribución uniforme

Con el propósito de complementar otros modelos de probabilidad se presenta la distribución uniforme. La distribución uniforme forma parte de la distribuciones de variable continua, también existe la versión para la discreta. La función densidad es $f(x) = 1$ para $0 \leq X \leq 1$, figura 6.E1. Por lo general, la distribución uniforme se plantea en un intervalo, donde los extremos corresponden a los valores de la variable $x_1 = a$ y $x_2 = b$, en ese caso la densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{b - a}$$

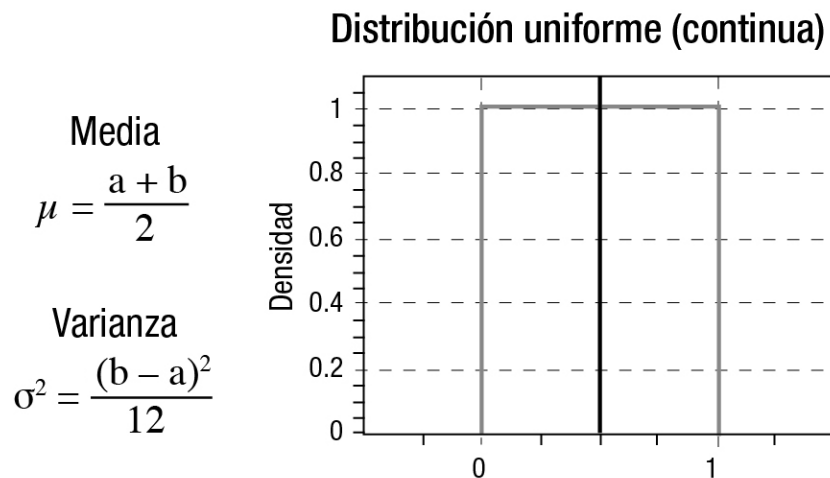


Figura 6.E1 Características de la distribución uniforme.

Considerando que los valores de $a = 0$ y $b = 1$

1. Contraste que el área bajo la curva es 1.
2. Encuentre la probabilidad de que la variable X está entre 0.20 y 0.80.
3. Calcule la probabilidad de que X está entre 0.5 y 0.9

Considere la función de densidad de una uniforme $f(x) = 0.3$, para la variable X , tal que $15 \leq X \leq 21$. Encuentre la media y la varianza. Luego:

1. Dibuje la distribución y revise que el área bajo la curva es 1.
2. Estime la probabilidad de que X es menor que 18.
3. Encuentre la probabilidad de que X está entre 16 y 20.

Actividades

1. Las probabilidades de que dos personas en un grupo tengan la misma fecha de nacimiento aumentan al crecer el grupo. Entre 15 personas es aproximadamente $1/10$, entre 26 personas es alrededor de $5/10$. Por arriba de 50 personas es casi certeza. La figura 6.E2 describe esta situación.



Figura 6.E2 Aplicación de la distribución de probabilidad en el empate de la fecha de cumpleaños.

2. Muchas acciones, funciones, situaciones o actividades entre otras, en la vida de una organización o un ser viviente, tienen un inicio y un fin. Tal situación se puede ver reflejada con una distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua, la cual puede ser simétrica o asimétrica. En la figura 6.E3 se puede pensar que una organización o vida inicia con un crecimiento, pasa a una estabilidad para llegar al envejecimiento y finalizar. Se puede profundizar en la temática de cada uno de estos puntos; por ejemplo, en la parte de envejecimiento, se estudian estrategias de supervivencia. Busque situaciones similares en ejemplos de administración, economía o algún tema de interés.



Figura 6.E3 Ciclo de vida.

Temas selectos: aplicación de la normal

En este apartado se presentan algunas aplicaciones de la distribución normal desarrolladas en *CalEst* que tienen importancia en la actividad industrial. Aquí sólo se darán a conocer las

referencias donde el usuario puede profundizar en el conocimiento de estos temas. En la figura 6.E4 se describen las opciones del módulo Control de calidad.

Métrica de Seis Sigma

La métrica seis sigma evalúa un proceso, y ésta se basa en el nivel de σ . Hay varios libros donde se puede examinar con mayor detalle el concepto, entre ellos puede consultar el de Escalante (2004, p. 239) y el de Breyfogle III (2003, Cap. 9, p. 188). La distribución normal como se ha desarrollado aquí será de mucha utilidad para resolver los ejemplos y problemas planteados en esos libros. En esos mismos libros se pueden encontrar los conceptos de capacidad del proceso; la eficiencia del cálculo de este índice depende de la distribución normal.

En la opción Estadística, Métodos avanzados, Control de calidad, en **CalEst**, aparece el cálculo del valor de X y Z para estimar la métrica.

Papel de la probabilidad normal

Este método gráfico es de mucha utilidad para evaluar si los datos siguen una distribución normal. El principio es tener un conjunto de datos y ordenarlos de menor a mayor. La idea es construir en un plano de coordenadas (x, y) referentes a un papel de probabilidad normal donde x es el eje horizontal y sus valores son los datos ordenados, y es el eje vertical y representa los porcentajes correspondientes a la distribución normal. Por lo general y es:

$$y_i = \frac{i - 0.5}{n} \%, \text{ donde } i = 1, \dots, n.$$

El valor de i representa la i ésima observación de los n datos estudiados.

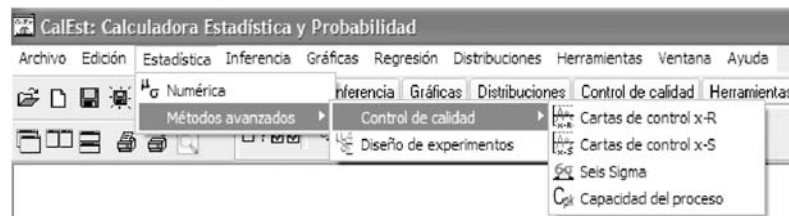


Figura 6.E4 Opciones del módulo de Control de calidad.

Cartas de control $\bar{X} - R$ o $\bar{X} - S$

Las cartas $(\bar{X} - R)$ son apropiadas para estudiar el promedio de la variable y la dispersión de los datos obtenidos del proceso cuando la característica de calidad que se mide en un producto se expresa en números. Por ejemplo, se puede medir en un artículo la longitud, masa, peso, temperatura, viscosidad, velocidad, densidad, alcalinidad, entre otras. Con el fin de obtener más detalle en la construcción de estas cartas, consultar Escalante (2004, p. 194).

Para construir una carta de control $(\bar{X} - R)$ se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se determina la característica de calidad. En la manufactura o en un servicio es importante identificar la variable que describirá la calidad del producto o bien.
2. Escoger el subgrupo muestra. El *subgrupo* es una pequeña parte de la producción que la representa, la idea fundamental es detectar los cambios que se producen en el sistema.

Existen dos procedimientos para seleccionar este subgrupo una vez definido el tamaño de la muestra.

En el primer procedimiento la meta es minimizar la variabilidad dentro de las unidades en la muestra y maximizar la variabilidad entre las muestras. Esto se logra seleccionando los artículos en la muestra en un rango de tiempo lo más pequeño posible.

Se debe tener presente que las cartas $\bar{X} - R$ o $\bar{X} - S$ ayudan a determinar si un proceso está fuera de control. Con la carta \bar{X} se observa la característica de calidad y con las cartas R o S la variabilidad del proceso; para ello primero se toma en cuenta la carta R o S , es decir, conocer la variabilidad de éste. Aunque es importante mantener en control la característica de calidad y la dispersión, no se puede interpretar la carta \bar{X} cuando las cartas R o S muestran condiciones que implican un proceso fuera de control.

Capacidad del proceso

Con el propósito de medir la capacidad de un proceso se establece un sistema de 5 índices que son de utilidad para cuantificar la capacidad de un proceso estable; éstos permitirán evaluarlo con respecto a los límites de especificación. Los índices son:

C_p = índice potencial del proceso.

CPU = índice superior del desempeño del proceso.

CPL = índice inferior del desempeño del proceso.

k = índice de centrado del proceso.

C_{pk} = índice del desempeño del proceso.

Conceptos generales de la capacidad del proceso

Con objeto de estimar los índices indicados anteriormente, primero se determina la característica de calidad que se desea medir, luego se toma una muestra aleatoria del proceso y se obtiene el histograma tal que contenga los límites de especificación inferior (LEI) y superior (LES). Observando a simple vista el histograma se puede analizar la forma de la distribución, si ésta tiene una forma acampanada puede representar un proceso capaz si éste está cerca del centro. También se puede emplear el papel de probabilidad de una distribución normal para observar la tendencia de los datos. La mayor amplitud es $6\hat{\sigma}$, es decir la longitud comprendida entre los límites de tolerancia del proceso. Se puede establecer que un proceso no es capaz si:

1. El proceso no es estable.
2. El proceso está centrado cerca de los límites de especificación.
3. El proceso es excesivamente variable.

Las cartas de control permiten conocer la estabilidad de un proceso. Por otro lado, es más fácil obtener un proceso capaz si la variabilidad del proceso no es tan grande. ¿Por qué?

Índice potencial del proceso C_p

Este índice depende sólo de la variabilidad en condiciones definidas del proceso a corto plazo y de que éste se encuentre bajo control estadístico. Un método simple para estimar el C_p es relacionar la amplitud del proceso con la amplitud permitida, esta última se establece de antemano:

$$C_p = \frac{\text{amplitud permitida}}{\text{amplitud actual del proceso}} = \frac{LES - LEI}{6\sigma}$$

se dice que el índice C_p estima la habilidad del proceso, ver figura 6.E5. Otra manera de evaluar al proceso en términos de porcentaje, es mediante el índice de razón de capacidad, éste se obtiene por el recíproco del índice C_p multiplicado por 100, es decir:

$$CR = \frac{1}{C_p} 100\%$$

El índice potencial del proceso presenta tres situaciones que permiten establecer la habilidad del proceso; estas situaciones se definen como sigue:

$$C_p \begin{cases} < 1 & \text{es no capaz} \\ = 1 & \text{es deseable} \\ > 1 & \text{es capaz} \end{cases}$$

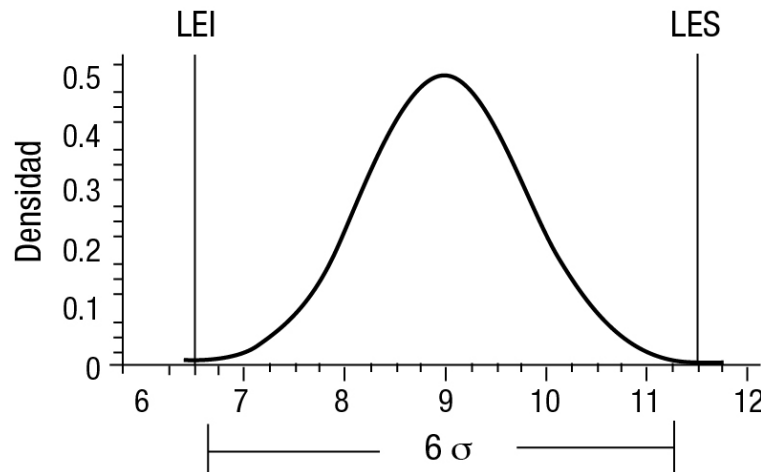


Figura 6.E5 Descripción del índice de capacidad del proceso.

Índice del desempeño del proceso C_{pk}

Cuando un proceso está bajo control estadístico, se espera que la característica de calidad que se le mide a los artículos tenga una distribución con promedio μ y varianza σ^2 . Generalmente un industrial requiere que la característica de calidad de su proceso tenga un comportamiento en promedio a un cierto valor establecido, éste frecuentemente se identifica como valor nominal del proceso denotado por T . Si el promedio y el valor nominal coinciden, es decir, $\mu = T$, entonces se dice que el proceso está *centrado*. Cuando esto no es así, se requiere de un índice que señale

qué tan lejos está el proceso del valor objetivo. Un objetivo es plantear cómo el desempeño del proceso se puede relacionar con el potencial del proceso C_p y con la medida de localización \bar{X} . Considere la situación en que el proceso únicamente se relaciona con el límite de especificación superior. En esta situación intervienen tanto la media \bar{X} , como la desviación estandar $\hat{\sigma}$ para definir el índice CPS denominado índice de capacidad superior, es decir:

$$CPS(CPU) = \frac{LES - \bar{X}}{3\hat{\sigma}}$$

Análogamente, se puede considerar de un proceso el límite de especificación inferior, esto da lugar a definir el índice de capacidad inferior como sigue:

$$CPI = (CPL) = \frac{\bar{X} - LES}{3\hat{\sigma}}$$

El índice C_{pk} mide el desempeño del proceso y su cálculo es:

$$C_{pk} = \min(CPI, CPS)$$