CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE ROBOTS MANIPULADORES: RESPUESTAS DE EJERCICIOS UNIDAD 03

Roger Miranda Colorado

23 de mayo de 2016

Índice

1. RESPUESTAS DE EJERCICIOS UNIDAD 03

A continuación se presentan las respuestas a los ejercicios planteados en la Unidad 3 del libro Cinemática y Dinámica de Robots Manipuladores.

Es importante tomar en cuenta que las respuestas propuestas son una posibilidad, aunque pueden existir otros métodos de solución y respuestas que pueden seguir siendo válidas.

Ejercicio 1 *Defina el concepto de cinemática directa para un robot manipulador.*

Solución 1 *Consiste en la determinación de la posición y orientación de un punto del robot en función de las variables de las articulaciones. De modo general es normal considerar como punto de interés el efector final.*

Ejercicio 2 *¿Los sistemas de referencia se asignan a una articulación o a un eslabón de un robot?.*

Solución 2 *Se asignan a los eslabones del robot.*

Ejercicio 3 *Explique cuál es la interpretación que se le da a los parámetros* a_{i-1}, α_{i-1}, d_i *y* θ_i.

Solución 3 *Se tienen las siguientes interpretaciones:*

1. a_{i-1}*: se conoce como la longitud del eslabón y es la distancia que existe entre* $\mathbf{z}_{i-1}$ *y* $\mathbf{z}_i$ *medida a lo largo de* $\mathbf{x}_{i-1}$.
2. α_{i-1}*: se conoce como doblez del eslabón y consiste en el ángulo que existe entre* $\mathbf{z}_{i-1}$ *y* $\mathbf{z}_i$ *medida con respecto a* $\mathbf{x}_{i-1}$.
3. d_i*: se conoce como el* offset *del eslabón y consiste en la distancia que existe entre* $\mathbf{x}_{i-1}$ *y* $\mathbf{x}_i$ *medida a lo largo de* $\mathbf{z}_i$.
4. θ_i*: se conoce como el ángulo de la articulación y consiste en el ángulo que existe entre los ejes* $\mathbf{x}_{i-1}$ *y* $\mathbf{x}_i$ *medido con respecto al eje* $\mathbf{z}_i$.

Ejercicio 4 *¿Cuáles parámetros son constantes y cuál es variable en la convención DH si la articulación considerada es prismática?.*

Solución 4 *En este caso* $\{a_{i-1}, \alpha_{i-1}, \theta_i\}$ *son constantes y* d_i *es variable.*

Ejercicio 5 *¿Cuáles parámetros son constantes y cuál es variable en la convención DH si la articulación considerada es rotacional?.*

Solución 5 *En este caso* $\{a_{i-1}, \alpha_{i-1}, d_i\}$ *son constantes y* θ_i *es variable.*

Ejercicio 6 *Indique cuál es la matriz de transformación homogénea general* T_i^{i-1} *de acuerdo a la convención DH.*

Solución 6 *La matriz de transformación general es:*

$$T_i^{i-1} = \begin{pmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i} c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i} c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -d_i s_{\alpha_{i-1}} \\ s_{\theta_i} s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i} s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & d_i c_{\alpha_{i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7 *Sea el robot manipulador PRPR de la fig. 1. Realizar las siguientes operaciones:*

1. *Asignación de sistemas de referencia.*
2. *Obtención de la tabla de parámetros de la convención DH.*
3. *Cálculo de las matrices de transformación* T_1^0, T_2^1, *etc.*

Solución 7 *Primero se obtiene la asignación de los sistemas de referencia y distancias del robot manipulador de acuerdo a la convención de Denavit-Hartenberg, como se muestra en la Fig. 2.*

De la asignación de sistemas de referencia mostrada en la figura anterior es claro que la tabla de parámetros del manipulador es la que se indica en la Tabla 2.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	-90
2	-90	0	L_2	θ_2
3	-90	0	d_3	0
4	-90	0	0	θ_4
e	0	L_e	0	-90

Tabla 2. *Asignación de parámetros del manipulador*

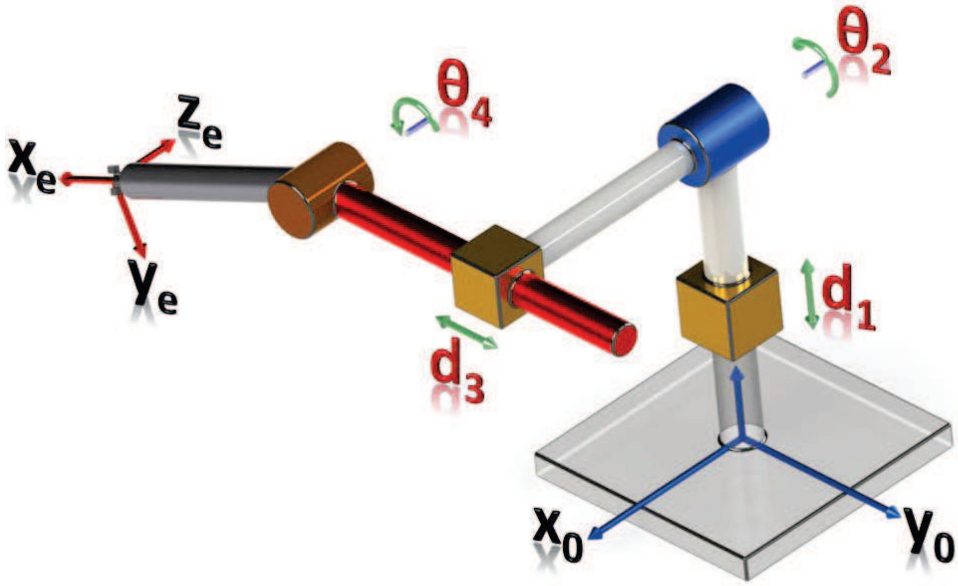

Figura 1: Robot manipulador para ejercicio 7.

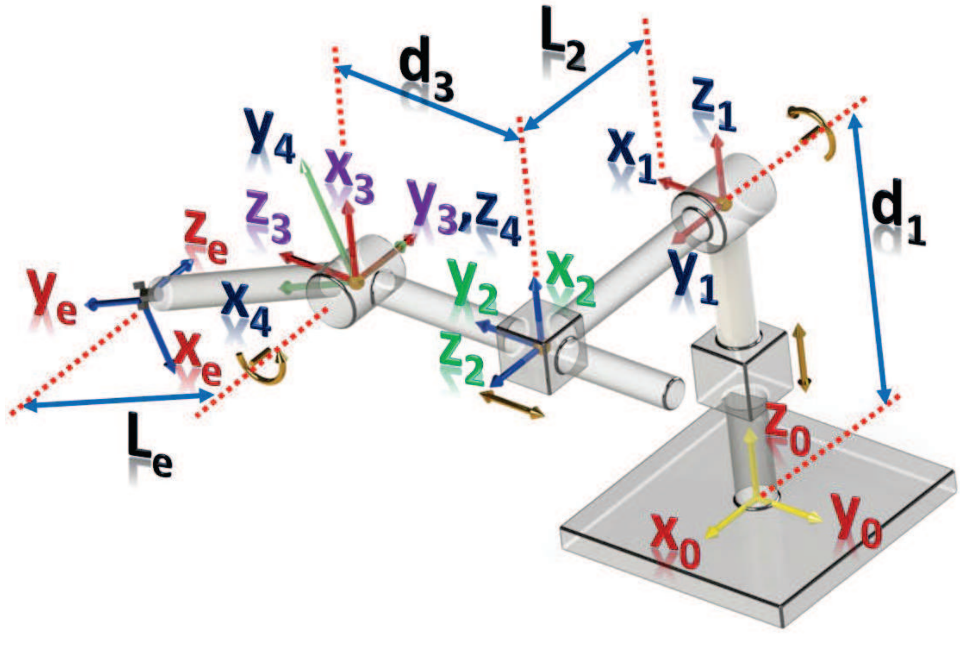

Figura 2: Asignación de los sistemas de referencia.

De la tabla de parámetros anterior se obtienen las matrices de transformación del manipulador como se indica a continuación:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2^1 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_4^3 = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_e^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & L_e \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y a partir de las matrices de transformación anteriores se obtien las siguientes matrices compuestas:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3^0 = T_2^0 T_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & L_2 \\ -c_2 & 0 & s_2 & s_2 d_3 \\ -s_2 & 0 & -c_2 & d_1 - c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_4^0 = T_3^0 T_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & L_2 \\ -c_2 c_4 - s_2 s_4 & c_2 s_4 - s_2 c_4 & 0 & s_2 d_3 \\ c_2 s_4 - s_2 c_4 & c_2 c_4 + s_2 s_4 & 0 & d_1 - c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_e^0 = T_4^0 T_e^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & L_2 \\ s_2 c_4 - c_2 s_4 & -c_2 c_4 - s_2 s_4 & 0 & s_2 d_3 - L_e c_2 c_4 - L_e s_2 s_4 \\ -c_2 c_4 - s_2 s_4 & c_2 s_4 - s_2 c_4 & 0 & d_1 - c_2 d_3 + L_e c_2 s_4 - L_e s_2 c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8 *Sea el robot manipulador RR de la fig. 3. Realizar las siguientes operaciones:*

1. *Asignación de sistemas de referencia de acuerdo a la convención DH.*
2. *Obtención de la tabla de parámetros de la convención DH.*
3. *Cálculo de las matrices de transformación T_1^0, T_2^1, etc.*

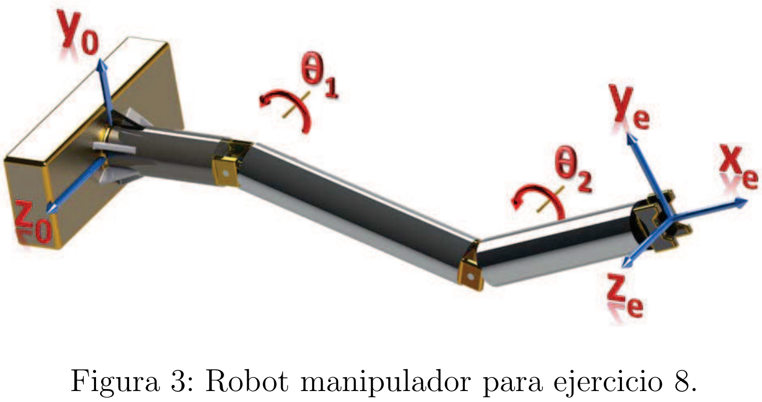

Figura 3: Robot manipulador para ejercicio 8.

Solución 8 *Para comenzar con el análisis de este robot manipulador se considera la posición indicada en la Fig. 4, donde se muestra la asignación de sistemas de referencia y las distancias correspondientes.*

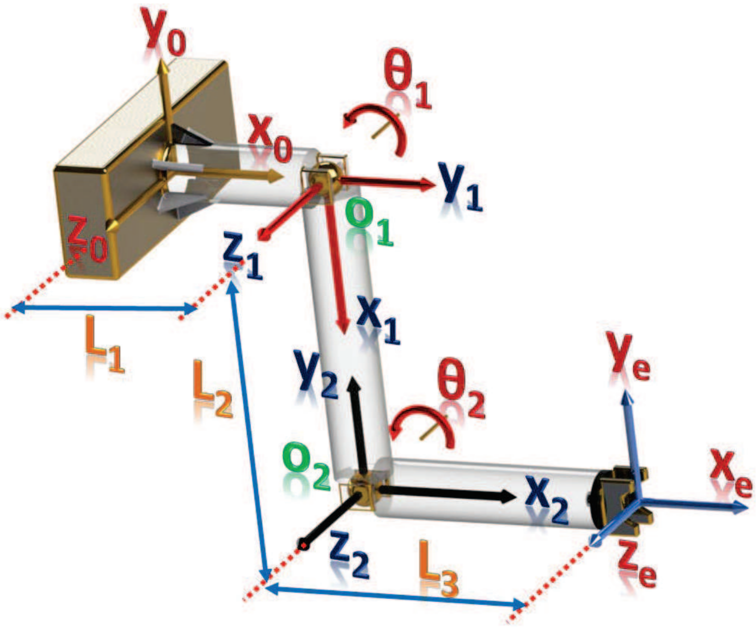

Figura 4: Asignación de sistemas de referencia.

De la asignación de sistemas de referencia mostrada previamente es posible obtener la tabla de parámetros del robot manipulador como se indica en la tabla 4.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	L_1	0	θ_1
2	0	L_2	0	θ_2
e	0	L_3	0	0

Tabla 4. *Tabla de parámetros de robot manipulador*

Con la asignación de parámetros obtenida anteriormente es posible obtener las matrices de transformación del manipulador como se indica a continuación:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & L_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2^1 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_e^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y las matrices compuestas son:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1 + L_2 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_e^0 = T_2^0 T_e^2 = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_1 + L_2 c_1 + L_3 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_2 s_1 + L_3 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices de transformación anteriores representan el análisis cinemático completo del robot manipulador mostrado.

Ejercicio 9 *Sea el robot manipulador RRRP de la fig. 5. Realizar las siguientes operaciones:*

1. *Asignación de sistemas de referencia de acuerdo a la convención DH.*
2. *Obtención de la tabla de parámetros de la convención DH.*
3. *Cálculo de las matrices de transformación T_1^0, T_2^1, etc.*

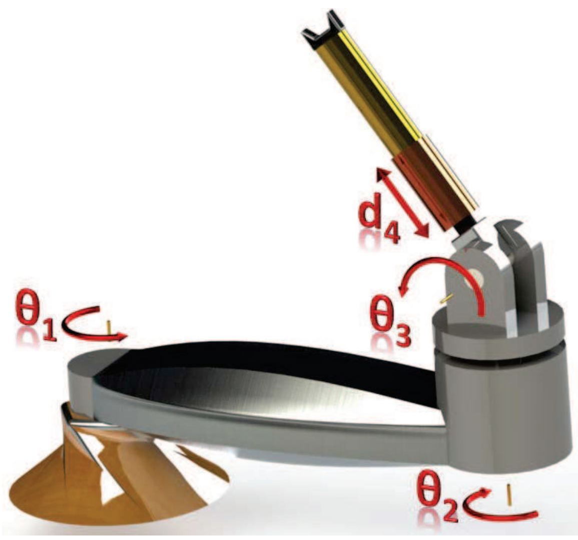

Figura 5: Robot manipulador para ejercicio 9.

Solución 9 *El primer paso para resolver el problema consiste en determinar la asignación de los sistemas de referencia del manipulador, así como las distancias correspondientes como se muestra en la fig. 6.*

A partir de la asignación mostrada previamente se obtiene la tabla de parámetros del manipulador como se muestra en la Tabla 6.

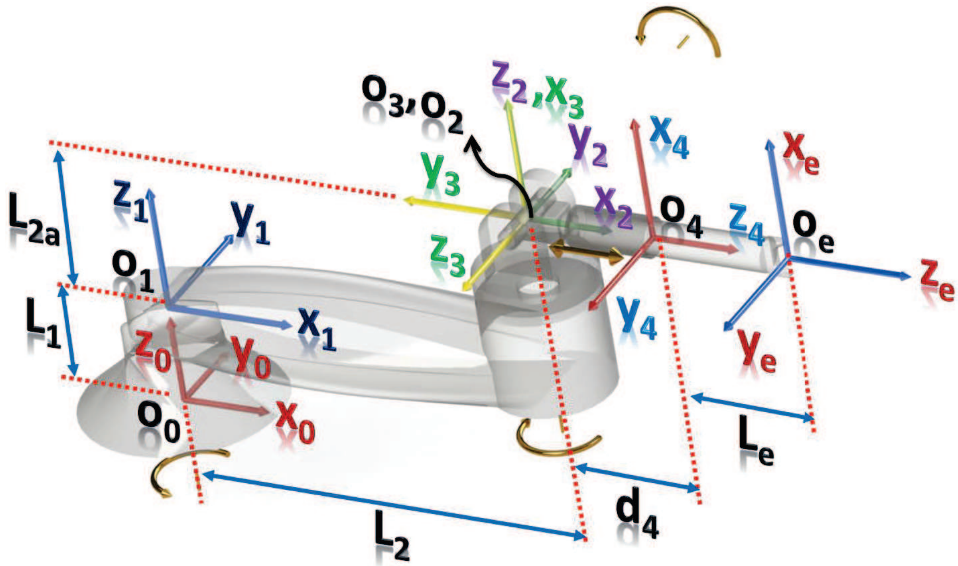

Figura 6: Asignación de sistemas de referencia.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	L_1	θ_1
2	0	L_2	L_{2a}	θ_2
3	90	0	0	θ_3
4	90	0	d_4	0
e	0	0	L_e	0

Tabla 6. *Tabla de parámetros del manipulador*

Empleando la tabla de parámetros anterior se obtienen las matrices de transformación del manipulador como se indica a continuación:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2^1 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_e^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y a partir de las matrices de transformación anteriores se obtienen las matrices de transformación compuestas del manipulador:

$$
\begin{aligned}
T_2^0 &= T_1^0 T_2^1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_2 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_3^0 &= T_2^0 T_3^2 = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_2 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{12}c_3 & -c_{12}s_3 & s_{12} & L_2 c_1 \\ s_{12}c_3 & -s_{12}s_3 & -c_{12} & L_2 s_1 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_1 + L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_4^0 &= T_3^0 T_4^3 = \begin{pmatrix} c_{12}c_3 & -c_{12}s_3 & s_{12} & L_2 c_1 \\ s_{12}c_3 & -s_{12}s_3 & -c_{12} & L_2 s_1 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_1 + L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{12}c_3 & s_{12} & -c_{12}s_3 & L_2 c_1 + c_{12}s_3 d_4 \\ s_{12}c_3 & -c_{12} & -s_{12}s_3 & L_2 s_1 + s_{12}s_3 d_4 \\ s_3 & 0 & c_3 & L_1 + L_{2a} - c_3 d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_e^0 &= T_4^0 T_e^4 = \begin{pmatrix} c_{12}c_3 & s_{12} & -c_{12}s_3 & L_2 c_1 + c_{12}s_3 d_4 \\ s_{12}c_3 & -c_{12} & -s_{12}s_3 & L_2 s_1 + s_{12}s_3 d_4 \\ s_3 & 0 & c_3 & L_1 + L_{2a} - c_3 d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{12}c_3 & s_{12} & -c_{12}s_3 & L_2 c_1 + c_{12}s_3 d_4 - L_e c_{12}s_3 \\ s_{12}c_3 & -c_{12} & -s_{12}s_3 & L_2 s_1 + s_{12}s_3 d_4 - L_e s_{12}s_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & L_1 + L_{2a} - c_3 d_4 + L_e c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

con lo que se concluye el análisis cinemático del robot manipulador.

Ejercicio 10 *Diseñe un programa en Matlab-Simulink que realice las siguientes operaciones para un robot manipulador planar de 2 GDL:*

1. *Subsistema que calcule la cinemática directa del efector final del robot manipulador.*

2. *Proporcionar una trayectoria del robot por medio de un conjunto de ángulos de las articulaciones y obtener la gráfica que muestre en el plano* **xy** *la evolución del efector final y un elemento que despliegue el valor numérico de la posición y orientación del efector final de acuerdo a los cálculos de su cinemática directa.*

Solución 10 *Para ejercicios de este tipo se debe de recurrir a la matriz de transformación T_e^0, que relacione al efector final con el sistema de referencia cero. En dicha ecuación se encuentra el elemento $\mathbf{o}_e^0$ que representa el origen del sistema de referencia $\{e\}$ con respecto al sistema $\{0\}$. Los tres elementos de $\mathbf{o}_e^0$ proporcionan la evolución de la posición del efector final, por lo que para realizar este problema basta con proponer una señal para cada ángulo $\{\theta_1, \theta_2\}$ e implementar los elementos de $\mathbf{o}_e^0$ en Simulink. Una vez implementados dichos datos se puede usar el bloque xy de simulink para obtener la evolución del efector final.*

Ejercicio 11 *Diseñe un programa en Matlab-Simulink que realice las siguientes operaciones para un robot manipulador de 3 GDL no planar:*

1. *Subsistema que calcule la cinemática directa del efector final del robot manipulador.*

2. *Proporcionar una trayectoria al robot manipulador por medio de un conjunto de ángulos de las articulaciones y obtener la gráfica en 3D del movimiento del efector final del robot empleando Matlab.*

Solución 11 *Este ejercicio se resuelve de modo similar al anterior, i.e., se debe de recurrir a la matriz de transformación T_e^0, que relacione al efector final con el sistema de referencia cero. En dicha ecuación se encuentra el elemento $\mathbf{o}_e^0$ que representa el origen del sistema de referencia $\{e\}$ con respecto al sistema $\{0\}$. Los tres elementos de $\mathbf{o}_e^0$ proporcionan la evolución de la posición del efector final, por lo que para realizar este problema basta con proponer una señal para cada ángulo $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ e implementar los elementos de $\mathbf{o}_e^0$ en Simulink. Para obtener la gráfica 3D del movimiento del efector final se puede emplear el bloque de Simulink* ***toFile*** *para almacenar los datos de la simulación y posteriormente en Matlab tomar dichos datos y graficarlos empleando la función* ***plot3****.*