CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE ROBOTS MANIPULADORES: RESPUESTAS DE EJERCICIOS UNIDAD 04

Roger Miranda Colorado

23 de mayo de 2016

Índice

1. RESPUESTAS DE EJERCICIOS UNIDAD 04

A continuación se presentan las respuestas a los ejercicios planteados en la Unidad 4 del libro Cinemática y Dinámica de Robots Manipuladores.

Es importante tomar en cuenta que las respuestas propuestas son una posibilidad, aunque pueden existir otros métodos de solución y respuestas que pueden seguir siendo válidas.

Ejercicio 1 *Considerando las velocidades lineal y angular, ¿cuál es una posible aplicación que se le puede dar al Jacobiano?.*

Solución 1 *La planificación de una trayectoria que se desea que siga el robot manipulador, donde no sólo se especifique la posición u orientación del efector final, sino también las velocidades del mismo, dependiendo de la tarea que se desee realizar.*

Ejercicio 2 *Indique qué es un cuerpo rígido.*

Solución 2 *Dado un cuerpo definido por el conjunto de puntos $C \subset \mathbb{R}^3$, se dice que es un cuerpo rígido si para todo $\{A, B\} \in C$ se cumple la siguiente expresión:*

$$\|\mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t)\| = \underset{t}{constante}$$

donde $\mathbf{r}_A(t)$ es el vector de posición para el punto A y $\mathbf{r}_B(t)$ es el vector de posición de B.

Ejercicio 3 *¿Qué es lo que indica o representa el Teorema de Euler?.*

Solución 3 *Dado un cuerpo que se encuentra rotando con respecto a un eje, una posible interpretación del Teorema de Euler es que todo movimiento angular induce una velocidad lineal en cualquier punto del cuerpo que no se encuentre ubicado sobre el eje de rotación.*

Ejercicio 4 *Dados dos sistemas de referencia $\{A\}$ y $\{B\}$ con diferente origen y orientación, si se representa un punto en movimiento en un sistema de referencia y se quiere determinar su velocidad lineal, dicha expresión se escribe de modo general como:*

$$\mathbf{v}_\mathbf{r}^A = \dot{\mathbf{o}}_B^A + R_B^A \mathbf{v}_\mathbf{r}^B + \omega_B^A \times \mathbf{r}^A$$

donde $\mathbf{o}_B^A$ representa el origen del sistema de referencia $\{B\}$ con respecto al sistema de referencia $\{A\}$, ω_B^A la velocidad angular de $\{B\}$ con respecto a $\{A\}$, $\mathbf{v}_\mathbf{r}^B$ la velocidad del punto p en $\{B\}$ y $\mathbf{r}^A$ la posición de p expresada en $\{A\}$. Indique de modo detallado la interpretación de cada uno de los términos que componen a la velocidad lineal $\mathbf{v}_\mathbf{r}^A$.

Solución 4 *La interpretación de los términos es la siguiente:*

1. *El término $\dot{\mathbf{o}}_B^A$ indica la velocidad del origen de $\{B\}$ con respecto a $\{A\}$.*

2. *El término $R_B^A \mathbf{v}_{\mathbf{r}}^B$ indica la velocidad de un punto del cuerpo en rotación visto desde $\{B\}$, pero referenciado con respecto a $\{A\}$.*

3. *El término $\omega_B^A \times \mathbf{r}^A$ indica la velocidad lineal inducida por el movimiento rotacional del cuerpo en rotación.*

Ejercicio 5 *Explique en qué consiste el método de propagación de velocidades.*

Solución 5 *Consiste en determinar las velocidades del robot en cualquier punto hasta el efector final, donde se parte desde la base del manipulador y a partir de dichas velocidades se calcula el conjunto de velocidades lineal y angular del siguiente sistema de referencia, propagando el efecto de las mismas hasta llegar al efector final.*

Ejercicio 6 *¿Qué son las singularidades en un robot manipulador y cómo pueden determinarse a partir del Jacobiano?.*

Solución 6 *Consisten en configuraciones del robot manipulador en las cuales se pierden grados de libertad. Se pueden obtener hallando los valores de las variables de las articulaciones en las cuales el Jacobiano pierde rango.*

Ejercicio 7 *¿Cuáles son los tipos de singularidades que puede poseer un robot manipulador y cuál es el significado de cada una?.*

Solución 7 *De modo general se tienen las siguientes singularidades:*

1. *Singularidades en el espacio de trabajo: configuraciones dentro del espacio de trabajo donde el robot pierde grados de libertad.*

2. *Singularidades en la frontera del espacio de trabajo: configuraciones en las cuales el robot se encuentra completamente extendido o retraido, por lo que pierde nuevamente grados de libertad.*

Ejercicio 8 *Sea S una matriz antisimétrica. Demostrar por cálculo directo la ecuación:*

$$S\left(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}\right) = \alpha S\left(\mathbf{x}\right) + \beta S\left(\mathbf{y}\right)$$

Solución 8 *Sean:*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\begin{aligned} S(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) &= S\left(\alpha\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}\right) \\ &= S\begin{pmatrix} \alpha a+\beta d \\ \alpha b+\beta e \\ \alpha c+\beta f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(\alpha c+\beta f) & \alpha b+\beta e \\ \alpha c+\beta f & 0 & -(\alpha a+\beta d) \\ -(\alpha b+\beta e) & \alpha a+\beta d & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mientras que:

$$\begin{aligned} \alpha S(\mathbf{x})+\beta S(\mathbf{y}) &= \alpha\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & -f & e \\ f & 0 & -d \\ -e & d & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(\alpha c+\beta f) & \alpha b+\beta e \\ \alpha c+\beta f & 0 & -(\alpha a+\beta d) \\ -(\alpha b+\beta e) & \alpha a+\beta d & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -(\alpha c+\beta f) & \alpha b+\beta e \\ \alpha c+\beta f & 0 & -(\alpha a+\beta d) \\ -(\alpha b+\beta e) & \alpha a+\beta d & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que la ecuación queda demostrada.

Ejercicio 9 *Demostrar por cálculo directo que:*

$$\frac{dR_{\mathbf{y},\theta}}{d\theta}=S(\mathbf{j})\,R_{\mathbf{y},\theta},\frac{dR_{\mathbf{z},\theta}}{d\theta}=S(\mathbf{k})\,R_{\mathbf{z},\theta}$$

Solución 9 *Primero se tiene:*

$$R_{\mathbf{y},\theta}=\begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix},\frac{d}{d\theta}R_{\mathbf{y},\theta}=\begin{pmatrix} -s_\theta & 0 & c_\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_\theta & 0 & -s_\theta \end{pmatrix}$$

mientras que:

$$S(\mathbf{j})\,R_{\mathbf{y},\theta}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -s_\theta & 0 & c_\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_\theta & 0 & -s_\theta \end{pmatrix}$$

Por otra parte, dadas:

$$R_{\mathbf{z},\theta}=\begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\frac{d}{dt}R_{\mathbf{z},\theta}=\begin{pmatrix} -s_\theta & -c_\theta & 0 \\ c_\theta & -s_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene:

$$S(\mathbf{k})\,R_{\mathbf{z},\theta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_\theta & -c_\theta & 0 \\ c_\theta & -s_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que las ecuaciones quedan demostradas.

Ejercicio 10 *Sea el robot manipulador de la fig. 1. Considérense de modo fijo los sistemas de referencia de la base* $\{0\}$ *y el sistema de referencia en el efector final* $\{e\}$*. Emplear el método de propagación de velocidades para obtener:*

1. $\mathbf{v}_e^e$ *y* ω_e^e
2. $\mathbf{v}_e^0$ *y* ω_e^0
3. J_e^e *y* J_e^0

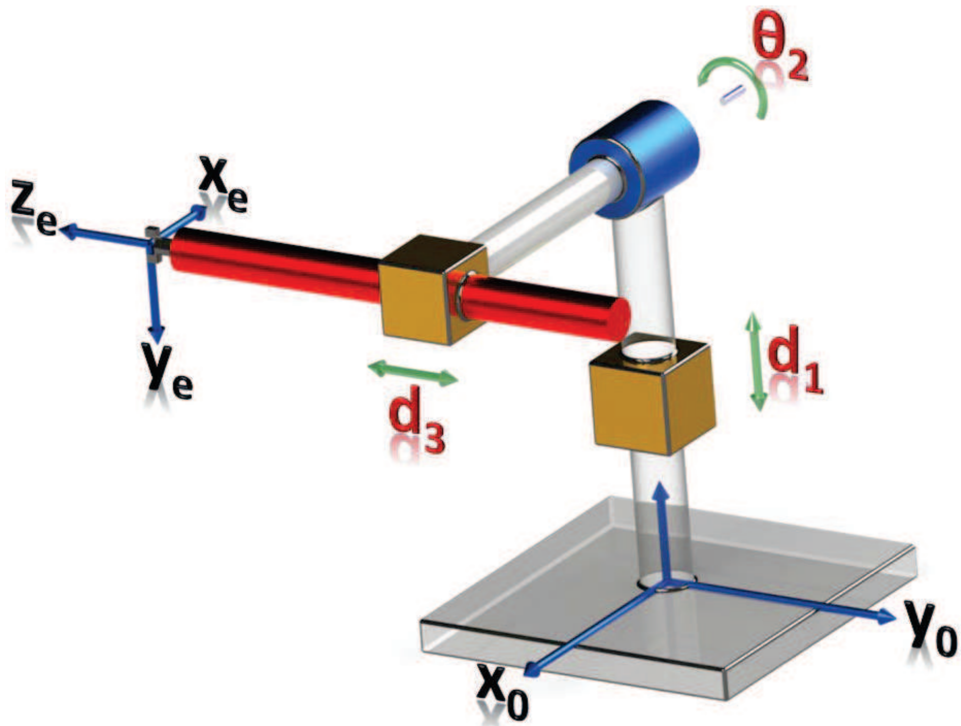

Figura 1: Robot manipulador para ejercicio 10.

Solución 10 *De modo inicial se determina la cinemática directa del manipulador, por lo que se realiza la asignación de sistemas de referencia mostrada en la Fig. 2.*

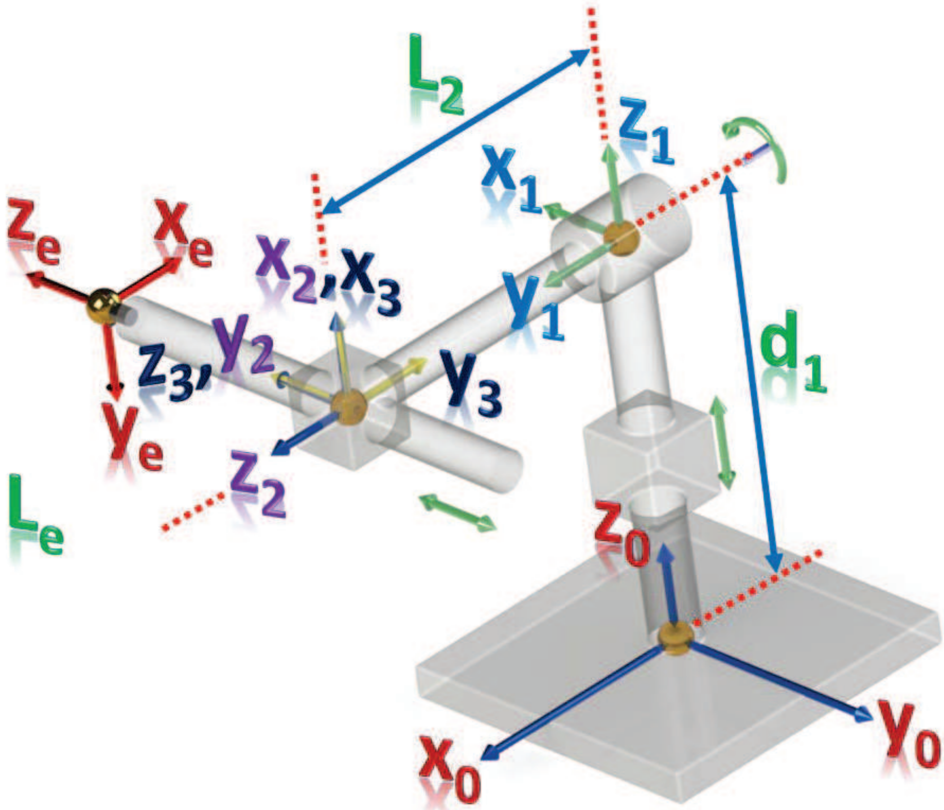

Figura 2: Asignación de sistemas de referencia.

Con la asignación anterior se obtiene la tabla 4-41 de parámetros del manipulador.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	-90
2	-90	0	L_2	θ_2
3	-90	0	d_3	0
e	0	0	L_e	90

Tabla 4-41. *Parámetros cinemáticos del manipulador*

Empleando los parámetros cinemáticos del manipulador se obtienen las siguientes matrices de transformación:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2^1 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_e^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y con estas matrices se obtienen las siguientes matrices de transformación compuestas:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3^0 = T_2^0 T_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & L_2 \\ -c_2 & 0 & s_2 & d_3 s_2 \\ -s_2 & 0 & -c_2 & d_1 - c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_e^0 = T_3^0 T_e^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & c_2 & s_2 & d_3 s_2 + L_e s_2 \\ 0 & s_2 & -c_2 & d_1 - c_2 d_3 - c_2 L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se aplicará el método de propagación de velocidades considerando que $\omega_0^0 = \mathbf{v}_0^0 = \mathbf{0}$. *De esta manera, debido a que la primera articulación es prismática se emplean las siguientes fórmulas:*

$$\begin{aligned} \omega_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1} \omega_i^i \\ \mathbf{v}_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1} \mathbf{v}_i^i + R_i^{i+1} \left(\omega_i^i \times \mathbf{r}_{i+1}^i \right) + \dot{d}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \end{aligned}$$

y con $i = 0$ *se obtiene:*

$$\omega_1^1 = R_0^1 \omega_0^0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_1^1 = R_0^1 \mathbf{v}_0^0 + R_0^1 \left(\omega_0^0 \times \mathbf{r}_1^0 \right) + \dot{d}_1 \mathbf{z}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{pmatrix}$$

Para la segunda articulación rotacional se emplean las fórmulas:

$$\begin{aligned} \omega_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1} \omega_i^i + \dot{\theta}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \\ \mathbf{v}_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1} \mathbf{v}_i^i + R_i^{i+1} \left(\omega_i^i \times \mathbf{r}_{i+1}^i \right) \end{aligned}$$

y con $i = 1$ *se obtiene:*

$$\omega_2^2 = R_1^2 \omega_1^1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{z}_2^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2^2 &= R_1^2 \mathbf{v}_1^1 + R_1^2 \left(\omega_1^1 \times \mathbf{r}_2^1 \right) \\ &= \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ -s_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{d}_1 s_2 \\ -\dot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, para la tercera articulación prismática se emplean nuevamente las fórmulas:

$$\begin{aligned} \omega_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1} \omega_i^i \\ \mathbf{v}_{i+1}^{i+1} &= R_i^{i+1} \mathbf{v}_i^i + R_i^{i+1} \left(\omega_i^i \times \mathbf{r}_{i+1}^i \right) + \dot{d}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1} \end{aligned}$$

y con $i = 2$ se obtiene:

$$\omega_3^3 = R_2^3 \omega_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3^3 &= R_2^3 \mathbf{v}_2^2 + R_2^3 \left(\omega_2^2 \times \mathbf{r}_3^2 \right) + \dot{d}_3 \mathbf{z}_3^3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{d}_1 s_2 \\ -\dot{d}_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ d_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\dot{d}_1 s_2 \\ 0 \\ -\dot{d}_1 c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ d_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\dot{d}_1 s_2 \\ 0 \\ -\dot{d}_1 c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2 d_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\dot{d}_1 s_2 \\ 0 \\ -\dot{d}_1 c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2 d_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{d}_1 s_2 - \dot{\theta}_2 d_3 \\ 0 \\ -\dot{d}_1 c_2 + \dot{d}_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente para el efector final se emplean nuevamente las fórmulas:

$$\omega_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} \omega_i^i$$
$$\mathbf{v}_{i+1}^{i+1} = R_i^{i+1} \mathbf{v}_i^i + R_i^{i+1} \left(\omega_i^i \times \mathbf{r}_{i+1}^i \right) + \dot{d}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^{i+1}$$

y con $i = 3$ se obtiene:

$$\omega_e^e = R_3^e \omega_3^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_e^e &= R_3^e \mathbf{v}_3^3 + R_3^e \left(\omega_3^3 \times \mathbf{r}_e^3 \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{d}_1 s_2 - \dot{\theta}_2 d_3 \\ 0 \\ -\dot{d}_1 c_2 + \dot{d}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_e \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{d}_1 s_2 + \dot{\theta}_2 d_3 \\ -\dot{d}_1 c_2 + \dot{d}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{d}_1 s_2 + \dot{\theta}_2 d_3 \\ -\dot{d}_1 c_2 + \dot{d}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -L_e \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{d}_1 s_2 + \dot{\theta}_2 d_3 \\ -\dot{d}_1 c_2 + \dot{d}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L_e \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{d}_1 s_2 + \dot{\theta}_2 d_3 + L_e \dot{\theta}_2 \\ -\dot{d}_1 c_2 + \dot{d}_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ahora se determinan $\mathbf{v}_e^0$ *y* ω_e^0*:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_e^0 &= R_e^0 \mathbf{v}_e^e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & s_2 & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{d}_1 s_2 + \dot{\theta}_2 d_3 + L_e \dot{\theta}_2 \\ -\dot{d}_1 c_2 + \dot{d}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \left(\dot{d}_1 s_2 + \dot{\theta}_2 d_3 + L_e \dot{\theta}_2 \right) + s_2 \left(-\dot{d}_1 c_2 + \dot{d}_3 \right) \\ s_2 \left(\dot{d}_1 s_2 + \dot{\theta}_2 d_3 + L_e \dot{\theta}_2 \right) - c_2 \left(-\dot{d}_1 c_2 + \dot{d}_3 \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 c_2 d_3 + L_e \dot{\theta}_2 c_2 + \dot{d}_3 s_2 \\ \dot{d}_1 + \dot{\theta}_2 s_2 d_3 + L_e \dot{\theta}_2 s_2 - \dot{d}_3 c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\omega_e^0 = R_e^0 \omega_e^e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & s_2 & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las velocidades anteriores pueden factorizarse de la siguiente manera:

$$\omega_e^e = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_e^e &= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{d}_1 s_2 + \dot{\theta}_2 d_3 + L_e \dot{\theta}_2 \\ -\dot{d}_1 c_2 + \dot{d}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_2 & d_3 + L_e & 0 \\ -c_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\omega_e^0 = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_e^0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 c_2 d_3 + L_e \dot{\theta}_2 c_2 + \dot{d}_3 s_2 \\ \dot{d}_1 + \dot{\theta}_2 s_2 d_3 + L_e \dot{\theta}_2 s_2 - \dot{d}_3 c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 \left(d_3 + L_e \right) & s_2 \\ 1 & s_2 \left(d_3 + L_e \right) & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De esta manera, los jacobianos buscados son:

$$J_e^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_2 & d_3 + L_e & 0 \\ -c_2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_e^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2\,(d_3 + L_e) & s_2 \\ 1 & s_2\,(d_3 + L_e) & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 11 *En el ejercicio 10 aplicar la fórmula de cambio de sistema de referencia del Jacobiano para determinar J_e^0 a partir de J_e^e.*

Solución 11 *Se tiene que:*

$$\begin{aligned} J_e^0 &= \begin{pmatrix} R_e^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_e^0 \end{pmatrix} J_e^e \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_2 & d_3 + L_e & 0 \\ -c_2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2\,(d_3 + L_e) & s_2 \\ 1 & s_2\,(d_3 + L_e) & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 12 *En el ejercicio 10 emplear el Jacobiano para determinar las configuraciones singulares del manipulador.*

Solución 12 *Los jacobianos del manipulador son:*

$$J_e^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_2 & d_3 + L_e & 0 \\ -c_2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_e^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2\,(d_3 + L_e) & s_2 \\ 1 & s_2\,(d_3 + L_e) & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que la tercera columna de J_e^e se puede obtener a partir de la primera columna, siempre que $c_2 = -1$. Por lo tanto, se concluye que en $\theta_2 = \pi\,rad$ el Jacobiano pierde rango y el robot se encuentra en una configuración singular.

Ejercicio 13 *Sea el robot manipulador mostrado en la fig. 3, donde se muestra de modo explícito la ubicación de los sistemas de referencia de la base $\{0\}$ y en el efector final $\{e\}$. Empleando el método del Jacobiano básico, determinar:*

1. J_4^0
2. J_e^0

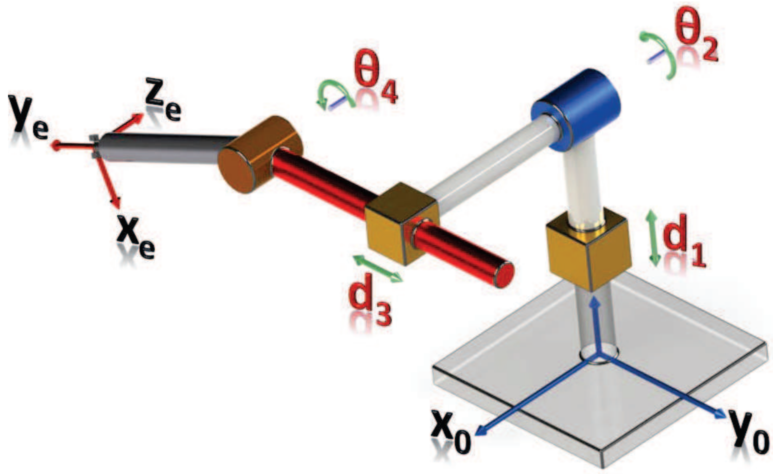

Figura 3: Robot manipulador para ejercicio 13.

Solución 13 *Para este manipulador se considera el análisis cinemático descrito por la Figura 4 y la Tabla 4-42.*

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	-90
2	-90	0	L_2	θ_2
3	-90	0	d_3	0
4	-90	0	0	θ_4
e	0	L_e	0	-90

Tabla 4-42. Parámetros cinemáticos del manipulador

Empleando los datos anteriores se obtienen las siguientes matrices de transformación del manipulador:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2^1 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

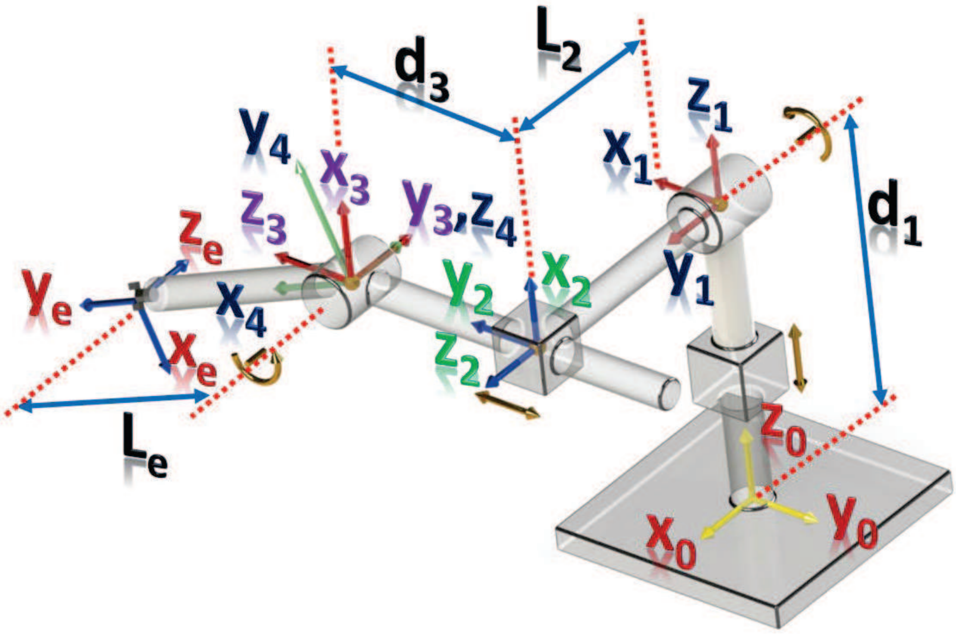

Figura 4: Asignación de sistemas de referencia.

$$T_4^3 = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_e^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & L_e \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y a partir de las matrices de transformación anteriores se obtien las siguientes matrices compuestas:

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_3^0 = T_2^0 T_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & L_2 \\ -c_2 & 0 & s_2 & s_2 d_3 \\ -s_2 & 0 & -c_2 & d_1 - c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_4^0 = T_3^0 T_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & L_2 \\ -c_2c_4 - s_2s_4 & c_2s_4 - s_2c_4 & 0 & s_2d_3 \\ c_2s_4 - s_2c_4 & c_2c_4 + s_2s_4 & 0 & d_1 - c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_e^0 = T_4^0 T_e^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & L_2 \\ s_2c_4 - c_2s_4 & -c_2c_4 - s_2s_4 & 0 & s_2d_3 - L_ec_2c_4 - L_es_2s_4 \\ -c_2c_4 - s_2s_4 & c_2s_4 - s_2c_4 & 0 & d_1 - c_2d_3 + L_ec_2s_4 - L_es_2c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, considerando el análisis del Jacobiano básico, y las variables de las articulaciones $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T = (d_1, \theta_2, d_3, \theta_4)^T$*, con* T_4^0 *se tiene el vector:*

$$\mathbf{x}_{p4}^0 = \begin{pmatrix} L_2 \\ s_2 d_3 \\ d_1 - c_2 d_3 \end{pmatrix}$$

y de la cinemática directa se tienen los vectores $\mathbf{z}$ *siguientes:*

$$\mathbf{z}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_2^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \\ -c_2 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_4^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} J_4^0 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{z}_4^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 d_3 & s_2 & 0 \\ 1 & s_2 d_3 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mientras que empleando T_e^0 *se obtiene:*

$$\mathbf{x}_{pe}^0 = \begin{pmatrix} L_2 \\ s_2 d_3 - L_e c_2 c_4 - L_e s_2 s_4 \\ d_1 - c_2 d_3 + L_e c_2 s_4 - L_e s_2 c_4 \end{pmatrix}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} J_e^0 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_3} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_2^0 & \mathbf{0} & \mathbf{z}_4^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 d_3 + L_e s_2 c_4 - L_e c_2 s_4 & s_2 & L_e c_2 s_4 - L_e s_2 c_4 \\ 1 & s_2 d_3 - L_e s_2 s_4 - L_e c_2 c_4 & -c_2 & L_e c_2 c_4 + L_e s_2 s_4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 14 *Para el ejercicio 10 emplee el método directo del cálculo del Jacobiano para calcular:*

1. J_3^0

2. J_e^0

Solución 14 *Para este manipulador se tienen las siguientes matrices de transformación:*

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & L_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & L_2 \\ -c_2 & 0 & s_2 & d_3 s_2 \\ -s_2 & 0 & -c_2 & d_1 - c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_e^0 = T_3^0 T_e^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & c_2 & s_2 & d_3 s_2 + L_e s_2 \\ 0 & s_2 & -c_2 & d_1 - c_2 d_3 - c_2 L_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo que se obtienen los siguientes datos:

$$\mathbf{z}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_2^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \\ -c_2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{p3}^0 = \begin{pmatrix} L_2 \\ d_3 s_2 \\ d_1 - c_2 d_3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_e^0 = \begin{pmatrix} L_2 \\ d_3 s_2 + L_e s_2 \\ d_1 - c_2 d_3 - c_2 L_e \end{pmatrix}$$

por lo que considerando $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T = (d_1, \theta_2, d_3)^T$*, los Jacobianos buscados son:*

$$J_3^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{p3}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p3}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p3}^0}{\partial q_3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_2^0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 d_3 & s_2 \\ 1 & s_2 d_3 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_e^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{z}_2^0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 d_3 + L_e c_2 & s_2 \\ 1 & s_2 d_3 + L_e s_2 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 15 *Sea el robot manipulador mostrado en la fig. 5, donde se muestra de modo explícito la ubicación de los sistemas de referencia de la base* $\{0\}$ *y en el efector final* $\{e\}$*. Empleando el método del Jacobiano básico, determinar:*

1. J_3^0

2. J_e^0

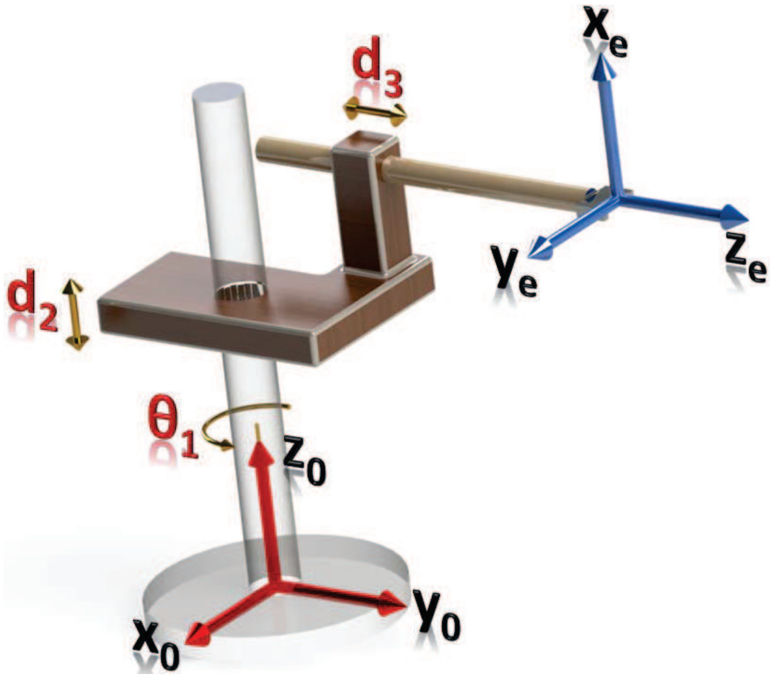

Figura 5: Robot manipulador para ejercicio 15.

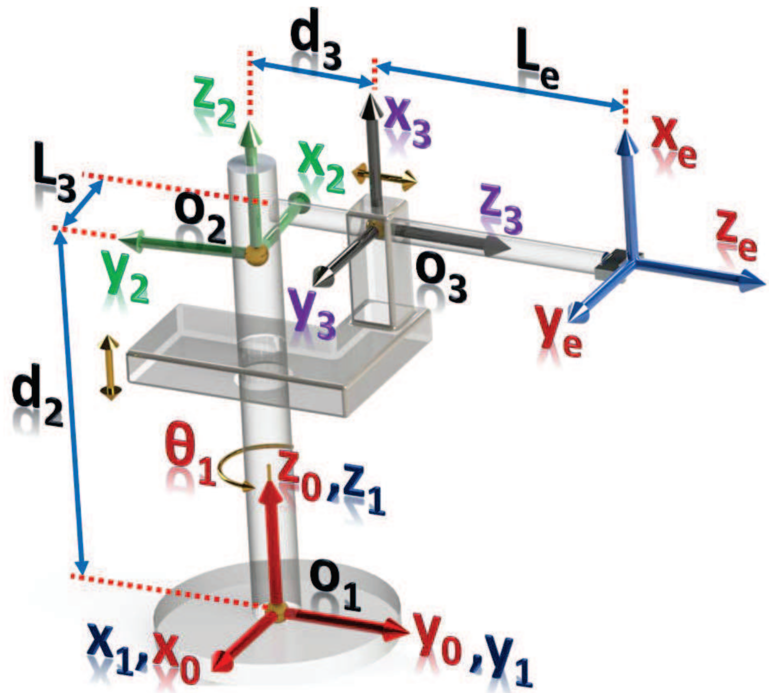

Figura 6: Asignación de sistemas de referencia.

Solución 15 *Para este manipulador se considera la asignación de sistemas de referencia mostrada en la Fig. 6 y los parámetros cinemáticos del mismo mostrados en la Tabla 4-43.*

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	0	d_2	π
3	90	L_3	d_3	90
e	0	0	L_e	0

Tabla 4-43. *Tabla de parámetros cinemáticos*

De esta manera se obtienen las siguientes matrices de transformación del manipulador:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2^0 = \begin{pmatrix} -c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & -s_1 & -L_3c_1 - s_1d_3 \\ 0 & s_1 & c_1 & -L_3s_1 + c_1d_3 \\ 1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_e^0 = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & -s_1 & -L_3c_1 - L_es_1 - s_1d_3 \\ 0 & s_1 & c_1 & -L_3s_1 + L_ec_1 + c_1d_3 \\ 1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De los datos anterores se obtienen los siguientes elementos:

$$\mathbf{z}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_3^0 = \begin{pmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{p3}^0 = \begin{pmatrix} -L_3c_1 - s_1d_3 \\ -L_3s_1 + c_1d_3 \\ d_2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{pe}^0 = \begin{pmatrix} -L_3c_1 - L_es_1 - s_1d_3 \\ -L_3s_1 + L_ec_1 + c_1d_3 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

por lo que, considerando las variables articulares $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T = (\theta_1, d_2, d_3)^T$*, los Jacobianos buscados son:*

$$J_3^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{p3}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p3}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p3}^0}{\partial q_3} \\ \mathbf{z}_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_3s_1 - c_1d_3 & 0 & -s_1 \\ -L_3c_1 - s_1d_3 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_e^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_3} \\ \mathbf{z}_1^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_3s_1 - L_ec_1 - c_1d_3 & 0 & -s_1 \\ -L_3c_1 - L_es_1 - s_1d_3 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 16 *Sea el robot manipulador mostrado en la fig. 7. Agregando un sistema de referencia $\{e\}$ en el efector final y empleando el método del Jacobiano básico, determinar:*

1. J_3^0
2. J_e^0

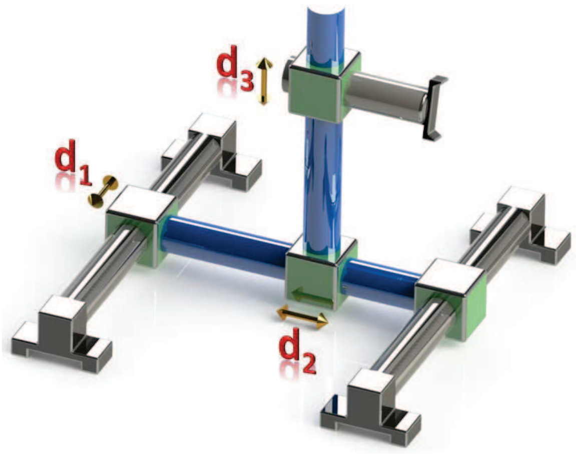

Figura 7: Robot manipulador para ejercicio 16.

Solución 16 *Primero se realiza la asignación de sistemas de referencia mostrada en la Fig. 8 y se obtienen los parámetros cinemáticos del manipulador mostrados en la Tabla 4-44.*

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	0
2	90	0	d_2	90
3	90	0	d_3	90
e	0	L_e	0	0

Tabla 4-44. *Parámetros cinemáticos del manipulador*

A partir de los datos anteriores se obtienen las matrices de transformación del manipulador como se indica a continuación:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -1 & 0 & 0 & -d_2 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_e^0 = T_3^0 T_e^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -1 & 0 & 0 & -d_2 - L_e \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

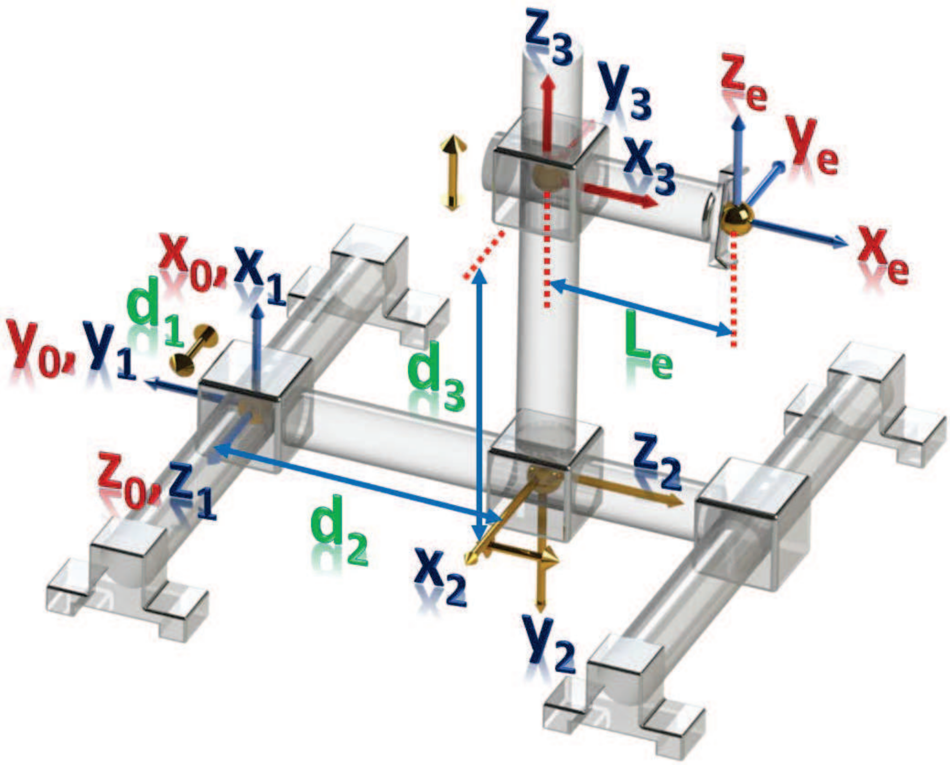

Figura 8: Asignación de sistemas de referencia.

Entonces se obtienen los siguientes datos:

$$\mathbf{x}_{p3}^{0} = \begin{pmatrix} d_3 \\ -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{pe}^{0} = \begin{pmatrix} d_3 \\ -d_2 - L_e \\ d_1 \end{pmatrix}$$

por lo que considerando las variables articulares $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T = (d_1, d_2, d_3)^T$, *los Jacobianos buscados son:*

$$J_3^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{p3}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p3}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p3}^0}{\partial q_3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_e^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 17 *Sea el robot manipulador mostrado en la fig. 9. Empleando el método del Jacobiano básico, determinar:*

1. J_4^0
2. J_e^0

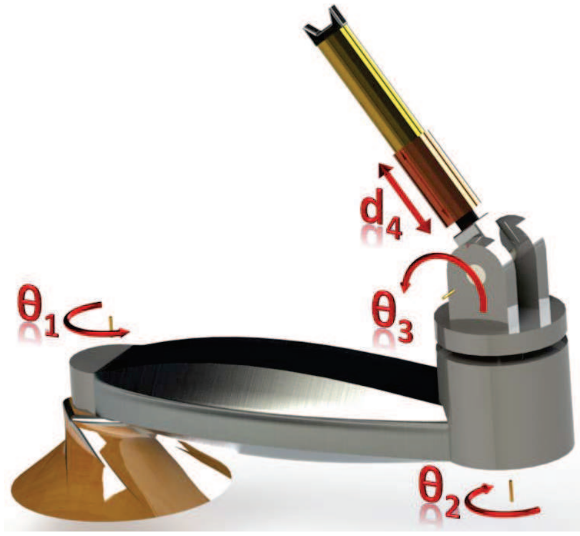

Figura 9: Robot manipulador para ejercicio 17.

Solución 17 *La asignación de sistemas de referencia y los parámetros cinemáticos del manipulador se muestran en la Fig. 10 y la Tabla 4-45, respectivamente.*

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	L_1	θ_1
2	0	L_2	L_{2a}	θ_2
3	90	0	0	θ_3
4	90	0	d_4	0
e	0	0	L_e	0

Tabla 4-45. *Parámetros cinemáticos del manipulador*

De esta manera se obtienen las matrices de transformación del manipulador como se indica a continuación:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2^0 = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_2 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

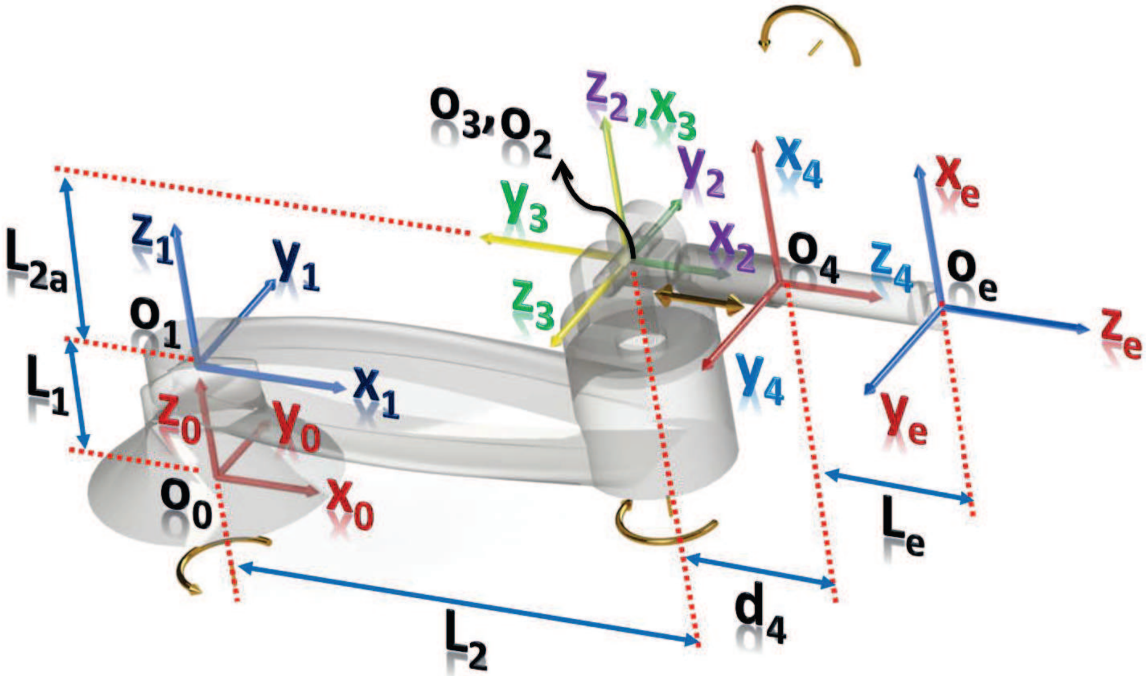

Figura 10: Asignación de sistemas de referencia.

$$T_3^0 = \begin{pmatrix} c_{12}c_3 & -c_{12}s_3 & s_{12} & L_2c_1 \\ s_{12}c_3 & -s_{12}s_3 & -c_{12} & L_2s_1 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_1 + L_{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_4^0 = \begin{pmatrix} c_{12}c_3 & s_{12} & -c_{12}s_3 & L_2c_1 + c_{12}s_3d_4 \\ s_{12}c_3 & -c_{12} & -s_{12}s_3 & L_2s_1 + s_{12}s_3d_4 \\ s_3 & 0 & c_3 & L_1 + L_{2a} - c_3d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_e^0 = \begin{pmatrix} c_{12}c_3 & s_{12} & -c_{12}s_3 & L_2c_1 + c_{12}s_3d_4 - L_ec_{12}s_3 \\ s_{12}c_3 & -c_{12} & -s_{12}s_3 & L_2s_1 + s_{12}s_3d_4 - L_es_{12}s_3 \\ s_3 & 0 & c_3 & L_1 + L_{2a} - c_3d_4 + L_ec_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Del análisis anterior se obtiene la siguiente información:

$$\mathbf{z}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_3^0 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ -c_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{p4}^0 = \begin{pmatrix} L_2c_1 + c_{12}s_3d_4 \\ L_2s_1 + s_{12}s_3d_4 \\ L_1 + L_{2a} - c_3d_4 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{pe}^0 = \begin{pmatrix} L_2c_1 + c_{12}s_3d_4 - L_ec_{12}s_3 \\ L_2s_1 + s_{12}s_3d_4 - L_es_{12}s_3 \\ L_1 + L_{2a} - c_3d_4 + L_ec_3 \end{pmatrix}$$

De esta manera, considerando las variables articulares $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, d_4)^T$, *los Jacobianos del manipulador son:*

$$J_4^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_4} & \frac{\partial \mathbf{x}_{p4}^0}{\partial q_4} \\ \mathbf{z}_1^0 & \mathbf{z}_2^0 & \mathbf{z}_3^0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_2 s_1 - s_{12} s_3 d_4 & -s_{12} s_3 d_4 & c_{12} c_3 d_4 & c_{12} s_3 \\ L_2 c_1 + c_{12} s_3 d_4 & c_{12} s_3 d_4 & s_{12} c_3 d_4 & s_{12} s_3 \\ 0 & 0 & s_3 d_4 & -c_3 \\ 0 & 0 & s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -c_{12} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_e^0 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_4} & \frac{\partial \mathbf{x}_{pe}^0}{\partial q_4} \\ \mathbf{z}_1^0 & \mathbf{z}_2^0 & \mathbf{z}_3^0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -L_2 s_1 - s_{12} s_3 d_4 + L_e s_{12} s_3 & -s_{12} s_3 d_4 + L_e s_{12} s_3 & c_{12} c_3 d_4 - L_e c_{12} c_3 & c_{12} s_3 \\ L_2 c_1 + c_{12} s_3 d_4 - L_e c_{12} s_3 & c_{12} s_3 d_4 - L_e c_{12} s_3 & s_{12} c_3 d_4 - L_e s_{12} c_3 & s_{12} s_3 \\ 0 & 0 & s_3 d_4 - L_e s_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -c_{12} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 18 *En el ejercicio 13 emplee la fórmula del Jacobiano en el efector final para obtener J_e^0 a partir de J_4^0.*

Solución 18 *Para este manipulador se tienen los siguientes datos:*

$$P_{ne}^4 = \begin{pmatrix} L_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, R_4^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -c_2 c_4 - s_2 s_4 & c_2 s_4 - s_2 c_4 & 0 \\ c_2 s_4 - s_2 c_4 & c_2 c_4 + s_2 s_4 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} P_{ne}^0 &= R_4^0 P_{ne}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -c_2 c_4 - s_2 s_4 & c_2 s_4 - s_2 c_4 & 0 \\ c_2 s_4 - s_2 c_4 & c_2 c_4 + s_2 s_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(c_2 c_4 + s_2 s_4\right) L_e \\ \left(c_2 s_4 - s_2 c_4\right) L_e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y se construye la matriz antisimétrica siguiente:

$$\hat{P}_{ne}^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\left(c_2 s_4 - s_2 c_4\right) L_e & -\left(c_2 c_4 + s_2 s_4\right) L_e \\ \left(c_2 s_4 - s_2 c_4\right) L_e & 0 & 0 \\ \left(c_2 c_4 + s_2 s_4\right) L_e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el Jacobiano en el efector final se obtiene de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
J_e^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -P_{ne}^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} J_4^0 \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & (c_2 s_4 - s_2 c_4) L_e & (c_2 c_4 + s_2 s_4) L_e \\
0 & 1 & 0 & -(c_2 s_4 - s_2 c_4) L_e & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -(c_2 c_4 + s_2 s_4) L_e & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} J_4^0 \\
&= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_2 d_3 - c_2 L_e s_4 + c_4 L_e s_2 & s_2 & c_2 L_e s_4 - c_4 L_e s_2 \\
1 & d_3 s_2 - c_2 c_4 L_e - L_e s_2 s_4 & -c_2 & c_2 c_4 L_e + L_e s_2 s_4 \\
0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 19 *En el ejercicio 15 emplee la fórmula del Jacobiano en el efector final para obtener J_e^0 a partir de J_3^0.*

Solución 19 *Para este manipulador se tienen los siguientes datos:*

$$
P_{ne}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_e \end{pmatrix}, R_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

con lo que se obtiene:

$$
P_{ne}^0 = R_3^0 P_{ne}^3 = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_e s_1 \\ L_e c_1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\hat{P}_{ne}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & L_e c_1 \\ 0 & 0 & L_e s_1 \\ -L_e c_1 & -L_e s_1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Por lo tanto, el Jacobiano en el efector final es:

$$
\begin{aligned}
J_e^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\hat{P}_{ne}^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} J_3^0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_e c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -L_e s_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_e c_1 & L_e s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_3 s_1 - c_1 d_3 & 0 & -s_1 \\ -L_3 c_1 - s_1 d_3 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} L_3 s_1 - L_e c_1 - c_1 d_3 & 0 & -s_1 \\ -L_3 c_1 - L_e s_1 - s_1 d_3 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 20 *En el ejercicio 16 emplee la fórmula del Jacobiano en el efector final para obtener J_e^0 a partir de J_3^0.*

Solución 20 *Para este manipulador se tienen los siguientes datos:*

$$
P_{ne}^3 = \begin{pmatrix} L_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, R_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

de donde se obtiene:

$$
P_{ne}^0 = R_3^0 P_{ne}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -L_e \\ 0 \end{pmatrix}
$$

por lo que se obtiene la matriz antisimétrica:

$$
\hat{P}_{ne}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -L_e \\ 0 & 0 & 0 \\ L_e & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

por lo que empleando las variables $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T = (d_1, d_2, d_3)^T$ *y el método del Jacobiano en el efector final se obtiene:*

$$
\begin{aligned}
J_e^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\hat{P}_{ne}^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} J_3^0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_e \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 21 *En el ejercicio 17 emplee la fórmula del Jacobiano en el efector final para obtener J_e^0 a partir de J_4^0.*

Solución 21 *Para este manipulador se tienen los siguientes datos:*

$$P_{ne}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_e \end{pmatrix}, R_4^0 = \begin{pmatrix} c_{12}c_3 & s_{12} & -c_{12}s_3 \\ s_{12}c_3 & -c_{12} & -s_{12}s_3 \\ s_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$P_{ne}^0 = R_4^0 P_{ne}^4 = \begin{pmatrix} c_{12}c_3 & s_{12} & -c_{12}s_3 \\ s_{12}c_3 & -c_{12} & -s_{12}s_3 \\ s_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_e c_{12}s_3 \\ -L_e s_{12}s_3 \\ L_e c_3 \end{pmatrix}$$

por lo que se obtiene la matriz antisimétrica siguiente:

$$\hat{P}_{ne}^0 = \begin{pmatrix} 0 & -L_e c_3 & -L_e s_{12}s_3 \\ L_e c_3 & 0 & L_e c_{12}s_3 \\ L_e s_{12}s_3 & -L_e c_{12}s_3 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que con las variables articulares $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, d_4)^T$ y el método del Jacobiano en el efector final se obtiene:

$$\begin{aligned} J_e^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\hat{P}_{ne}^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} J_4^0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & L_e c_3 & L_e s_{12}s_3 \\ 0 & 1 & 0 & -L_e c_3 & 0 & -L_e c_{12}s_3 \\ 0 & 0 & 1 & -L_e s_{12}s_3 & L_e c_{12}s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} J_4^0 \\ &= \begin{pmatrix} -L_2 s_1 - s_{12}s_3 d_4 + L_e s_{12}s_3 & -s_{12}s_3 d_4 + L_e s_{12}s_3 & c_{12}c_3 d_4 - L_e c_{12}c_3 & c_{12}s_3 \\ L_2 c_1 + c_{12}s_3 d_4 - L_e c_{12}s_3 & c_{12}s_3 d_4 - L_e c_{12}s_3 & s_{12}c_3 d_4 - L_e s_{12}c_3 & s_{12}s_3 \\ 0 & 0 & s_3 d_4 - L_e s_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -c_{12} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 22 *Sea el robot manipulador del ejercicio 13. Suponiendo que se aplica en el efector final una fuerza $F = (1, 0, -1)^T$. Determinar los pares de articulación necesarios para que el robot manipulador mantenga el equilibrio estático.*

Solución 22 *Empleando el análisis del Jacobiano en el dominio de la fuerza, sea J_{ve}^0 la parte del Jacobiano en el efector final correspondiente a la velocidad lineal. Para este*

manipulador se sabe que:

$$
\begin{aligned}
R_e^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ s_2c_4 - c_2s_4 & -c_2c_4 - s_2s_4 & 0 \\ -c_2c_4 - s_2s_4 & c_2s_4 - s_2c_4 & 0 \end{pmatrix} \\
J_e^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2d_3 + L_es_2c_4 - L_ec_2s_4 & s_2 & L_ec_2s_4 - L_es_2c_4 \\ 1 & s_2d_3 - L_es_2s_4 - L_ec_2c_4 & -c_2 & L_ec_2c_4 + L_es_2s_4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

por lo que:

$$
J_{ve}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2d_3 + L_es_2c_4 - L_ec_2s_4 & s_2 & L_ec_2s_4 - L_es_2c_4 \\ 1 & s_2d_3 - L_es_2s_4 - L_ec_2c_4 & -c_2 & L_ec_2c_4 + L_es_2s_4 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
F^0 &= R_e^0 F \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ s_2c_4 - c_2s_4 & -c_2c_4 - s_2s_4 & 0 \\ -c_2c_4 - s_2s_4 & c_2s_4 - s_2c_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ s_2c_4 - c_2s_4 \\ -c_2c_4 - s_2s_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, los pares necesarios para que el robot se mantenga en equilibrio estático son:

$$
\begin{aligned}
\tau &= \left(J_{ve}^0\right)^T F^0 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2d_3 + L_es_2c_4 - L_ec_2s_4 & s_2 & L_ec_2s_4 - L_es_2c_4 \\ 1 & s_2d_3 - L_es_2s_4 - L_ec_2c_4 & -c_2 & L_ec_2c_4 + L_es_2s_4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ s_2c_4 - c_2s_4 \\ -c_2c_4 - s_2s_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -c_2c_4 - s_2s_4 \\ -d_3s_4 + L_e \\ c_4 \\ -L_e \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 23 *Sea el robot manipulador del ejercicio 13. Suponiendo que se aplica en el efector final una fuerza $F = (1, 0, -1)^T$. Determinar los pares de articulación necesarios para que el robot manipulador mantenga el equilibrio estático.*

Solución 23 *Empleando el análisis del Jacobiano en el dominio de la fuerza, sea J_{ve}^0 la parte del Jacobiano en el efector final correspondiente a la velocidad lineal. Para este*

manipulador se sabe que:

$$
\begin{aligned}
R_e^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ s_2c_4 - c_2s_4 & -c_2c_4 - s_2s_4 & 0 \\ -c_2c_4 - s_2s_4 & c_2s_4 - s_2c_4 & 0 \end{pmatrix} \\
J_e^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2d_3 + L_es_2c_4 - L_ec_2s_4 & s_2 & L_ec_2s_4 - L_es_2c_4 \\ 1 & s_2d_3 - L_es_2s_4 - L_ec_2c_4 & -c_2 & L_ec_2c_4 + L_es_2s_4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

por lo que:

$$
J_{ve}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2d_3 + L_es_2c_4 - L_ec_2s_4 & s_2 & L_ec_2s_4 - L_es_2c_4 \\ 1 & s_2d_3 - L_es_2s_4 - L_ec_2c_4 & -c_2 & L_ec_2c_4 + L_es_2s_4 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
F^0 &= R_e^0 F \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ s_2c_4 - c_2s_4 & -c_2c_4 - s_2s_4 & 0 \\ -c_2c_4 - s_2s_4 & c_2s_4 - s_2c_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ s_2c_4 - c_2s_4 \\ -c_2c_4 - s_2s_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, los pares necesarios para que el robot se mantenga en equilibrio estático son:

$$
\begin{aligned}
\tau &= \left(J_{ve}^0\right)^T F^0 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2d_3 + L_es_2c_4 - L_ec_2s_4 & s_2 & L_ec_2s_4 - L_es_2c_4 \\ 1 & s_2d_3 - L_es_2s_4 - L_ec_2c_4 & -c_2 & L_ec_2c_4 + L_es_2s_4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ s_2c_4 - c_2s_4 \\ -c_2c_4 - s_2s_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -c_2c_4 - s_2s_4 \\ -d_3s_4 + L_e \\ c_4 \\ -L_e \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 24 *Sea el robot manipulador del ejercicio 16. Suponiendo que se aplica en el efector final una fuerza $F = (1, 0, -1)^T$. Determinar los pares de articulación necesarios para que el robot manipulador mantenga el equilibrio estático.*

Solución 24 *Empleando el análisis del Jacobiano en el dominio de la fuerza, sea J_{ve}^0 la parte del Jacobiano en el efector final correspondiente a la velocidad lineal. Para este*

manipulador se sabe que:

$$R_e^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, J_e^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$J_{ve}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^0 = R_e^0 F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los pares necesarios para que el robot se mantenga en equilibrio estático son:

$$\begin{aligned} \tau &= \left(J_{ve}^0\right)^T F^0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 25 *Aplicar la técnica RMRC para un robot manipulador no planar de 3 GDL.*

Solución 25 *Para resolver este problema basta con seguir el mismo procedimiento descrito en la parte final de este Capítulo, donde debe de tenerse especial cuidado en los elementos que se deben de modificar para aplicar la técnica RMRC al robot planar de 3 GDL. En este caso, se debe de emplear el vector* $\mathbf{x}_p^0$ *de la matriz* T_3^0 *del robot manipulador planar, así como el Jacobiano del mismo. Los demás pasos pueden ser los mismos y como aspecto adicional debe de prestarse especial atención a las trayectorias que se desea que siga el manipulador. Debido a que el movimiento es en un plano, debe de verificarse que la trayectoria que se emplee sea acorde con el espacio de trabajo del manipulador.*

En el material web del libro se proporcionan los archivos de simulación para un control RMRC empleando un robot PUMA. Con dicho programa puede entenderse la forma en que se aplica la técnica de control RMRC.