Fracciones parciales

por

Ramón Espinosa Armenta

Una **expresión racional** con coeficientes en un campo K, es una expresión de la forma

$$\frac{a(x)}{b(x)}$$

donde $a(x), b(x) \in K[x]$ y $b(x) \neq 0$. Diremos que

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{c(x)}{d(x)}$$

si y sólo si $a(x)d(x) = b(x)c(x)$. El conjunto de expresiones racionales con coeficientes en K se denotará $K(x)$.

La suma de dos expresiones racionales se define como

$$\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)d(x) + b(x)c(x)}{b(x)d(x)}.$$

También definimos el producto de dos expresiones racionales como:

$$\frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)c(x)}{b(x)d(x)}.$$

Se puede verificar fácilmente que con estas operaciones $K(x)$ es un campo.

Una expresión racional $a(x)/b(x)$ se dice que es propia, si el grado de $a(x)$ es menor que el grado de $b(x)$. Si $a(x)/b(x)$ es una expresión racional impropia podemos utilizar el algoritmo de la división para escribir $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$, donde $r(x) = 0$ o grado $r(x) <$ grado $b(x)$, de esta manera

$$\frac{a(x)}{b(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}.$$

Por lo que toda expresión racional o es propia o se puede escribir como un polinomio más una expresión racional propia. Veremos a continuación cómo expresar una expresión racional propia como suma de expresiones racionales sencillas, llamadas fracciones parciales.

Lema 1. *Sean $a(x), b(x) \in K[x]$ distintos de cero, tales que grado $a(x) <$ grado $b(x)$ y supongamos que*

$$b(x) = p_1(x)p_2(x),$$

donde $mcd(p_1(x), p_2(x)) = 1$. Entonces existen polinomios $r_1(x), r_2(x) \in K[x]$, tales que

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{r_1(x)}{p_1(x)} + \frac{r_2(x)}{p_2(x)}.$$

donde grado $r_1(x) <$ grado $p_1(x)$ y grado $r_2(x) <$ grado $p_2(x)$.

Demostración. Como $mcd(p_1(x), p_2(x)) = 1$, existen $s(x), t(x) \in K[x]$ tales que

$$1 = s(x)p_1(x) + t(x)p_2(x).$$

De ahí que

$$a(x) = f(x)p_1(x) + g(x)p_2(x),$$

donde $f(x) = s(x)a(x)$ y $g(x) = t(x)a(x)$. Ahora bien, por el algoritmo de la división,

$$g(x) = p_1(x)q_1(x) + r_1(x),$$

donde grado $r_1(x) <$ grado $p_1(x)$. Sustituyendo obtenemos

$$a(x) = r_1(x)p_2(x) + r_2(x)p_1(x),$$

donde $r_2(x) = f(x) + q_1(x)p_2(x)$. Por lo tanto $r_2(x)p_1(x) = a(x) - r_1(x)p_2(x)$, y de ahí que grado $r_2(x)p_1(x) \leq$ grado $a(x) <$ grado $b(x)$, por lo tanto

$$\text{grado } r_2(x) + \text{grado } p_1(x) < \text{grado } p_1(x) + \text{grado } p_2(x),$$

con lo cual concluimos que grado $r_2(x) <$ grado $p_2(x)$. De modo que

$$a(x) = r_1(x)p_2(x) + r_2(x)p_1(x)$$

con grado $r_1(x) <$ grado $p_1(x)$ y grado $r_2(x) <$ grado $p_2(x)$. Dividiendo entre $b(x) = p_1(x)p_2(x)$ obtenemos la conclusión deseada. □

Lema 2. *Sean $a(x), b(x) \in K[x]$ distintos de cero, tales que grado $a(x) <$ grado $b(x)$ y supongamos que*

$$b(x) = [p_1(x)]^{m_1}[p_2(x)]^{m_2} \cdots [p_k(x)]^{m_k}$$

donde $p_1(x), p_2(x) \ldots, p_k(x)$ son polinomios distintos, irreducibles en $K[x]$. Entonces existen polinomios $h_1(x), \ldots, h_k(x)$, con grado $h_j(x) <$ grado $[p_j(x)]^{m_j}$, para toda $j = 1, \ldots, k$, tales que

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{h_1(x)}{[p_1(x)]^{m_1}} + \cdots + \frac{h_k(x)}{[p_k(x)]^{m_k}}.$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre k. Si $k = 1$ basta tomar $h_1(x) = a(x)$. Supongamos cierto el resultado para algún k. Si

$$b(x) = [p_1(x)]^{m_1} \cdots [p_k(x)]^{m_k}[p_{k+1}(x)]^{m_{k+1}},$$

entonces por el lema 1

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{r_1(x)}{[p_1(x)]^{m_1} \cdots [p_k(x)]^{m_k}} + \frac{r_2(x)}{[p_{k+1}(x)]^{m_{k+1}}},$$

donde

$$\text{grado } r_1(x) < \text{grado } [p_1(x)]^{m_1} \cdots [p_k(x)]^{m_k}$$

y

$$\text{grado } r_2(x) < \text{grado } [p_{k+1}(x)]^{m_{k+1}}.$$

Ahora bien, por hipótesis de inducción:

$$\frac{r_1(x)}{[p_1(x)]^{m_1} \cdots [p_k(x)]^{m_k}} = \frac{h_1(x)}{[p_1(x)]^{m_1}} + \cdots + \frac{h_k(x)}{[p_k(x)]^{m_k}}.$$

Por lo que haciendo $h_{k+1}(x) = r_2(x)$ se cumple el resultado. □

Lema 3. *Sean $h(x), p(x) \in K[x]$ tales que*

$$\textit{grad } h(x) < \textit{grado } [p(x)]^m,$$

entonces existen polinomios $h_1(x), \ldots, h_m(x)$, donde $h_j(x) = 0$ o grado $h_j(x) <$ grado $p(x)$, para toda $j = 1, \ldots, m$, tales que

$$\frac{h(x)}{[p(x)]^m} = \frac{h_1(x)}{p(x)} + \frac{h_2(x)}{[p(x)]^2} + \cdots + \frac{h_m(x)}{[p(x)]^m}.$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre m. Si $m = 1$ el resultado es trivialmente cierto. Supongamos ahora que el resultado es cierto para algún $m \geq 1$. Por el algoritmo de la división:

$$h(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

donde $r(x) = 0$ o grado $r(x) <$ grado $p(x)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{h(x)}{[p(x)]^{m+1}} &= \frac{q(x)}{[p(x)]^m} + \frac{r(x)}{[p(x)]^{m+1}} \\
&= \frac{h_1(x)}{p(x)} + \frac{h_2(x)}{[p(x)]^2} + \cdots + \frac{h_m(x)}{[p(x)]^m} + \frac{r(x)}{[p(x)]^{m+1}}.
\end{aligned}$$

Por lo que haciendo $h_{m+1}(x) = r(x)$ se cumple el resultado. $\square$

Teorema 1 (Fracciones parciales)**.** *Sean $a(x), b(x) \in K[x]$ distintos de cero, tales que grado $a(x) <$ grado $b(x)$ y supongamos que*

$$b(x) = [p_1(x)]^{m_1}[p_2(x)]^{m_2} \cdots [p_k(x)]^{m_k}$$

donde $p_1(x), p_2(x) \ldots, p_k(x)$ son polinomios distintos, irreducibles en $K[x]$, entonces

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{h_{i,j}(x)}{[p_i(x)]^j},$$

donde $h_{i,j}(x)$ es cero o grado $h_{i,j}(x) <$ grado $p_i(x)$, para toda $i = 1, \ldots, k$ y para toda $j = 1, \ldots, m_i$.

Demostración. Se sigue directamente de los lemas anteriores. $\square$

Ejemplo 1. Descomponer

$$\frac{7x - 11}{(x-3)(x+2)}$$

en fracciones parciales en $\mathbb{R}(x)$.

Solución.

$$\frac{7x - 11}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$$

$$= \frac{a(x+2) + b(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

Por lo tanto
$$7x - 11 = a(x+2) + b(x-3)$$
En particular, evaluando en ambos lados en $x = 3$ tenemos que $10 = 5a$ y por lo tanto $a = 2$. Análogamente, si $x = -2$ tenemos que $-25 = -5b$ y de ahí que $b = 5$. En conclusión:
$$\frac{7x-11}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x-3} + \frac{5}{x+2}.$$

$\triangle$

Ejemplo 2. Descomponer
$$\frac{4}{(x^2+1)}$$
en fracciones parciales en $\mathbb{C}(x)$.

Solución.
$$\begin{aligned}\frac{4}{x^2+1} &= \frac{4}{(x-i)(x+i)} \\ &= \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i} \\ &= \frac{a(x+i) + b(x-i)}{x^2+1}\end{aligned}$$
Por lo tanto $a = -2i$ y $b = 2i$. De modo que
$$\frac{4}{x^2+1} = \frac{-2i}{x-i} + \frac{2i}{x+i}.$$

$\triangle$

Ejemplo 3. Descomponer
$$\frac{3x^4+5}{x(x^2+1)^2}$$
en fracciones parciales en $\mathbb{R}(x)$.

Solución.

$$\frac{3x^4+5}{x(x^2+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{cx+d}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{a(x^2+1)^2 + x(bx+c)(x^2+1) + (dx+e)x}{x(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(a+b)x^4 + cx^3 + (2a+b+d)x^2 + (c+e)x + a}{x(x^2+1)^2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} a+b &= 3 \\ c &= 0 \\ 2a+b+d &= 0 \\ c+e &= 0 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

De ahí que $a = 5$, $b = -2$, $c = 0$, $d = -8$ y $e = 0$, y por lo tanto

$$\frac{3x^4+5}{x(x^2+1)^2} = \frac{5}{x} + \frac{-2x}{x^2+1} + \frac{-8x}{(x^2+1)^2}.$$

△

Ejercicios

1. Encuentra la descomposición de

$$\frac{2x-5}{(x-2i)(x+4)}$$

en fracciones parciales en $\mathbb{C}(x)$.

2. Encuentra la descomposición de

$$\frac{4x^2+8x+5}{(x+1)(x+2)^2}$$

en fracciones parciales en $\mathbb{R}(x)$.

3. Encuentra la descomposición de

$$\frac{5x^2 - 7x + 26}{x(x^2 - 4x + 13)}$$

en fracciones parciales en $\mathbb{R}(x)$.

4. Encuentra la descomposición de

$$\frac{5x^2 - 7x + 26}{x(x^2 - 4x + 13)}$$

en fracciones parciales en $\mathbb{C}(x)$.