Raíces reales y complejas

por

Ramón Espinosa Armenta

Durante el siglo XVIII, *Euler*, *d'Alembert* y *Lagrange* probaron, independientemente, que todo polinomio de grado $n \geq 1$ tenía una raíz sobre el campo de los números complejos. Este resultado se comenzó a llamar el teorema fundamental del álgebra. Sin embargo, en 1799 Gauss mostró en su tesis doctoral que esas demostraciones tenían errores y dio la primera demostración correcta de este resultado.

Teorema 1 (Teorema Fundamental del Álgebra). *Todo polinomio* $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ *de grado* $n \geq 1$ *tiene una raíz en* $\mathbb{C}$.

Otra demostración del teorema fundamental del álgebra fue dada por Argand en 1806. El mismo Gauss dio otras dos demostraciones en 1816 y una última en 1849. Las demostraciones de Argand y Gauss permitieron clarificar la noción de número complejo. Desafortunadamente, todas las demostraciones utilizan conceptos y resultados de análisis, los cuales están fuera de los propósitos de este libro, por lo que no daremos ninguna demostración.

El teorema fundamental del álgebra asegura la existencia de raíces complejas, pero no nos dice cómo encontrarlas. Un resultado muy útil para buscar raíces reales es el siguiente.

Teorema 2. *Si* $a(x)$ *es un polinomio con coeficientes reales y* r, s *son dos números reales tales que* $a(r)$ *y* $a(s)$ *tienen signos opuestos, entonces existe una raíz real entre* r *y* s.

Este resultado es intuitivamente cierto, sin embargo para demostrarlo formalmente es necesario utilizar propiedades de funciones continuas, por lo que omitiremos la prueba.

Ejemplo 1. Consideremos el polinomio

$$a(x) = x^4 - 10x^2 + 1.$$

Observa que $a(0) = 1$ y $a(1) = -8$, por lo que $a(x)$ tiene una raíz real en el intervalo $[0, 1]$. $\triangle$

Sea $a(x) \in \mathbb{Q}[x]$ y sea M el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes de $a(x)$. Por lo tanto el polinomio $b(x) = Ma(x)$ tiene coeficientes enteros. Además r es raíz de $a(x)$ si y sólo si r es raíz de $b(x)$. Por lo que el problema de encontrar raíces racionales de un polinomio con coeficientes racionales se reduce al problema de encontrar raíces racionales en un polinomio con coeficientes enteros.

Teorema 3. *Si*

$$a(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

es un polinomio de grado n con coeficientes enteros y si $r = p/q$ es una raíz racional de $a(x)$, donde p y q son primos relativos, entonces $p|a_0$ y $q|a_n$.

Demostración. Por hipótesis

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

por lo tanto

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

De ahí que

$$a_n p^n = q(-a_{n-1} p^{n-1} - \cdots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1})$$

y por lo tanto $q|a_n p^n$. Como $mcd(p, q) = 1$, se sigue que $q|a_n$.

También se puede observar que

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n.$$

y por lo tanto $p|a_0 q^n$ y de ahí que $p|a_0$. $\square$

Corolario 1. *Si*

$$a(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

es un polinomio con coeficientes enteros y si r es una raíz racional de $a(x)$, entonces $r \in \mathbb{Z}$ y $r|a_0$.

Ejemplo 2. Hallar todas las raíces del polinomio

$$a(x) = 6x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1.$$

Solución. Busquemos primero raíces racionales. Si p/q es una raíz, entonces por el teorema anterior $p|(-1)$ y $q|6$, por lo tanto los candidatos a ser raíz son:

$$\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/6.$$

Ahora bien,

$$\begin{array}{ccccc|l} 6 & -1 & 5 & -1 & -1 & \underline{1} \\ & 6 & 5 & 10 & 9 & \\ \hline 6 & 5 & 10 & 9 & |\, 8 & \end{array}$$

Por lo tanto $a(1) = 8 > 0$. Por otra parte $a(0) = -1 < 0$, por lo que debe haber una raíz real entre 0 y 1 (la cual podría ser racional). Observemos que

$$\begin{array}{ccccc|l} 6 & -1 & 5 & -1 & -1 & \underline{1/2} \\ & 3 & 1 & 3 & 1 & \\ \hline 6 & 2 & 6 & 2 & |\, 0 & \end{array}$$

Por lo tanto $1/2$ es raíz del polinomio, además

$$a(x) = (x - 1/2)(6x^3 + 2x^2 + 6x + 2) = (2x - 1)(3x^3 + x^2 + 3x + 1),$$

por lo que de haber otra raíz racional p/q ésta debería de cumplir que $p|1$ y $q|3$, por lo que los candidatos a ser raíz son: $\pm\ 1$ y $\pm\ 1/3$. Ya vimos que 1 no puede ser raíz, por lo que podemos descartar este número. Después de inspeccionar algunos candidatos llegamos a que

$$\begin{array}{cccc|l} 6 & 2 & 6 & 2 & \underline{-1/3} \\ & -2 & 0 & -2 & \\ \hline 6 & 0 & 6 & |\, 0 & \end{array}$$

Por lo tanto $-1/3$ es otra raíz. Además las otras raíces deben ser raíces del polinomio $6x^2 + 6 = 6(x^2 + 1)$, el cual tiene a i y a $-i$ como raíces. En conclusión las raíces de $a(x)$ son: $1/2,\ -1/3,\ i$ y $-i$. △

Ejemplo 3. Demostrar que si p es primo entonces $\sqrt{p}$ es irracional.

Demostración. Consideremos el polinomio $x^2 - p$. Los candidatos a ser raíces racionales son $\pm\ 1, \pm\ p$. El lector puede comprobar fácilmente que ninguno de estos números es raíz del polinomio, por lo que no existe un número racional r tal que $r^2 = p$, y por lo tanto $\sqrt{p}$ es irracional. △

El siguiente teorema establece que si un número es raíz de un polinomio con coeficientes reales, entonces el conjugado de dicho número también es raíz del polinomio.

Teorema 4. *Si*

$$a(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

es un polinomio con coeficientes reales y $r \in \mathbb{C}$ es raíz de $a(x)$, entonces $\bar{r}$ también es raíz de $a(x)$.

Demostración. Por hipótesis:

$$a(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Ahora bien, utilizando propiedades del conjugado de un número complejo y el hecho de que los coeficientes del polinomio son números reales, tenemos que

$$\begin{aligned} a(\bar{r}) &= a_n \bar{r}^n + a_{n-1}\bar{r}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{r} + a_0 \\ &= \bar{a}_n \bar{r}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{r}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1\bar{r} + \bar{a}_0 \\ &= \overline{a_n r^n} + \overline{a_{n-1}r^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 r} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0} \\ &= \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 4. Encontrar las raíces del polinomio

$$x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 30x - 50,$$

sabiendo que una raíz es $3 - i$.

Solución. Utilizando división sintética:

$$\begin{array}{rrrrrl} 1 & -6 & 5 & 30 & -50 & \quad |\underline{3-i} \\ & 3-i & -10 & -15+5i & 50 & \\ \hline 1 & -3-i & -5 & 15+5i & |\ 0 & \end{array}$$

Además, por el teorema anterior, $3 + i$ también es raíz, lo cual podemos verificar con división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & \text{-3-i} & \text{-5} & \text{15+5i} & \underline{3+i} \\ & \text{3-i} & 0 & \text{-15-5i} & \\ \hline 1 & 0 & \text{-5} \ | & 0 & \end{array}$$

El último cociente corresponde al polinomio $x^2 - 5$, el cual tiene dos raíces: $\pm\sqrt{5}$. Por lo tanto las raíces del polinomio son: $3 - i,\ 3 + i, \sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$. △

En el siglo XVI el matemático italiano *Gerolamo Cardano* obtuvo una fórmula para las soluciones de la ecuación cúbica con coeficientes complejos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Posteriormente, su discípulo *Ludovico Ferrari* obtuvo una fórmula para las soluciones de la ecuación cuártica:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Durante los siglos XVI, XVII y XVIII hubo intentos infructuosos para hallar una fórmula que permitiera encontrar las soluciones de una ecuación polinomial de grado cinco, hasta que en 1824 el joven matemático noruego *Niels Henrik Abel* probó que ésta no podía resolverse por medio de radicales, es decir, no existía una expresión involucrando solamente las operaciones de suma y multiplicación, así como raíces n-ésimas, que permitiera encontrar las soluciones de una ecuación polinomial de grado cinco en términos de los coeficientes del polinomio. Poco después el joven francés *Evaristo Galois* encontró condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación polinomial pueda resolverse por radicales.

Recordemos que un polinomio $p(x) \in K[x]$ de grado mayor que cero, es **irreducible** en $K[x]$, si todo divisor de $p(x)$ es de la forma λ o $\lambda p(x)$ para algún $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$.

Teorema 5. *$p(x)$ es irreducible en $\mathbb{C}[x]$ si y sólo si grado $p(x) = 1$.*

Demostración. Sea $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{C}[x]$. Por el teorema fundamental del álgebra, existe $r \in \mathbb{C}$ tal que $p(r) = 0$, por lo tanto, por el teorema del factor $(x - r)|p(x)$. Como $p(x)$ es irreducible, debe existir $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $p(x) = \lambda(x - r)$ y de ahí que grado $p(x) = 1$.

El recíproco se sigue del teorema 10.22. □

Corolario 2. *Todo polinomio $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado $n > 0$, puede ser escrito en la forma*
$$a(x) = \lambda(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$
donde $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ y $r_1, \ldots, r_n$ son las raíces de $a(x)$. Además esta factorización es única excepto por el orden en el que aparecen los factores.

Teorema 6. *$p(x)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ si y sólo si grado $p(x) = 1$ o $p(x) = ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$.*

Demostración. Supongamos que $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$. Por el teorema fundamental del álgebra existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = 0$. Si $z \in \mathbb{R}$, entonces $x - z \in \mathbb{R}[x]$ y además, por el teorema del factor, $(x - z)|p(x)$. Como $p(x)$ es irreducible, se sigue que $p(x) = \lambda(x - z)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $p(x)$ tiene grado uno. Si $z \notin \mathbb{R}$, entonces $z \neq \bar{z}$, además por el teorema 4 $p(\bar{z}) = 0$. Sea
$$b(x) = (x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} = x^2 - 2(Re\ z)x + |z|^2.$$
Por lo tanto $b(x) \in \mathbb{R}[x]$. Ahora bien, por el algoritmo de la división
$$p(x) = b(x)q(x) + r(x),$$
donde $r(x) = 0$ o grado $r(x) < 2$; en otras palabras $r(x) = ux + v$, donde $u, v \in \mathbb{R}$. Observemos que
$$0 = p(z) = b(z)q(z) + r(z) \quad \text{y} \quad b(z) = 0$$
por lo que $r(z) = 0$ y por lo tanto $uz + v = 0$. Como $z \notin \mathbb{R}$, esta ecuación implica que $u = v = 0$ y de ahí que $r(x) = 0$. En conclusión $p(x) = b(x)q(x)$. Pero como $p(x)$ es irreducible, entonces $q(x) = a$ para algún $a \in \mathbb{R}$ y por lo tanto
$$p(x) = ab(x) = ax^2 + bx + c$$
donde $b = 2aRe\ z$ y $c = a|z|^2$. Observemos además que
$$b^2 - 4ac = 4a^2(Re\ z)^2 - 4a^2|z|^2 = 4a^2[(Re\ z)^2 - |z|^2] < 0,$$
pues $Im\ z \neq 0$.

Recíprocamente, si grado $p(x) = 1$ entonces $p(x)$ es irreducible por el teorema 10.22, y si $p(x) = ax^2 + bx + c$, con $b^2 - 4ac < 0$, entonces $p(x)$ no tiene raíces reales, por lo tanto $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$. $\square$

Corolario 3. *Todo polinomio $a(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado $n > 0$, puede ser escrito en la forma*

$$a(x) = \lambda(x - r_1) \cdots (x - r_k)(x^2 + b_1 x + c_1) \cdots (x^2 + b_s x + c_s)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $r_1, \ldots, r_k$ son las raíces reales de $a(x)$ y los $b_j s$, $c_j s$ son números reales tales que $b_j - 4c_j < 0$ para toda $j = 1, \ldots, s$. Además $n = k + 2s$.

Ejemplo 5. Factorizar el polinomio

$$x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 30x - 50$$

como producto de polinomios irreducibles en
(a) $\mathbb{C}[x]$; (b) $\mathbb{R}[x]$; (b) $\mathbb{Q}[x]$.

Solución. En el ejemplo 4 vimos que las raíces de este polinomio son

$$3 - i,\ 3 + i, \sqrt{5} \quad \text{y} \quad -\sqrt{5}.$$

Por lo tanto su factorización en $\mathbb{C}[x]$ es:

$$(x - 3 + i)(x - 3 - i)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

y su factorización en $\mathbb{R}[x]$ es:

$$(x^2 - 6x + 10)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}).$$

Por último, $x^2 - 5$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, por lo que la factorización del polinomio en $\mathbb{Q}[x]$ es:

$$(x^2 - 6x + 10)(x^2 - 5).$$

$\triangle$

Ejercicios

1. Encuentra las raíces del polinomio:

$$15x^3 + 37x^2 + 12x - 4 \qquad \text{en} \quad \mathbb{R}[x].$$

2. Encuentra las raíces del polinomio:

$$16x^3 + 8x^2 - 7x + 1 \qquad \text{en} \quad \mathbb{R}[x].$$

3. Muestra que i y $-i$ son raíces dobles del polinomio

$$x^5 - 3ix^4 + 2x^3 - 6ix^2 + x - 3i$$

   y encuentra la otra raíz.

4. Encuentra todas las raíces del polinomio:

$$x^3 + 6x^2 - 24x + 160,$$

   sabiendo que una raíz es $2 - 2\sqrt{3}i$.

5. Encuentra todas las raíces del polinomio:

$$x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x + 4$$

   sabiendo que tiene a $1 + i$ como una raíz doble.

6. Suponiendo que cada raíz de multiplicidad m es contada m veces, demuestra que todo polinomio $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces.

7. Demuestra que todo polinomio $a(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ de grado impar tiene al menos una raíz real.

8. Considera el polinomio

$$a(x) = x^2 + a_1 x + a_0$$

   en $\mathbb{C}[x]$. Demuestra que si r_1, r_2 son las raíces de $a(x)$ entonces

$$\begin{aligned} a_1 &= -(r_1 + r_2) \\ a_0 &= r_1 r_2 \end{aligned}$$

9. Considera el polinomio

$$a(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

   en $\mathbb{C}[x]$. Demuestra que si r_1, r_2, r_3 son las raíces de $a(x)$ entonces

$$\begin{aligned} a_2 &= -(r_1 + r_2 + r_3) \\ a_1 &= r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 \\ a_0 &= -(r_1 r_2 r_3) \end{aligned}$$

10. Encuentra las raíces r_1, r_2 y r_3 del polinomio

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 2$$

sabiendo que $r_1 = r_2 + r_3$.

11. Encuentra las raíces r_1, r_2 y r_3 del polinomio

$$3x^3 + 2x^2 - 19x + 6$$

sabiendo que $r_1 + r_2 = -1$.

12. Encuentra las raíces r_1, r_2 y r_3 del polinomio

$$x^3 - 7x^2 - 42x + 216$$

sabiendo que $r_3^2 = r_1 r_2$.