Respuestas a los problemas impares del capítulo 11

Permutaciones y combinaciones

11.1 Hay 7 maneras de elegir al Presidente. Habiendo elegido a éste, hay 6 maneras de elegir al Secretario, y por último hay 6 maneras de elegir al Tesoro. De ahí que, por el principio del producto hay $7 \cdot 6 \cdot 5$ formas de elegir el comité.

11.3 Tenemos cinco cifras y tres posibilidades para cada cifra, por lo que tenemos en total 3^5 enteros.

11.5 Hay 8 maneras de colocar una torre en la primera fila. Luego tenemos 7 formas de colocar una torre en la segunda fila, pues debe estar en una columna distinta. Habiendo colocado las dos primeras torres tenemos 6 maneras de colocar la tercera torre, y así sucesivamente, para un total de 8! maneras de colocar 8 torres de modo que no se pueda comer una a la otra.

11.7 Coloquemos a una de las mujeres en un asiento. Hay 5 maneras distintas de colocar a un hombre a la derecha de esa mujer, después tenemos 4 maneras de elegir a la mujer que estará a la derecha de ese hombre, y así sucesivamente, para un total de $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = (5!)(4!)$ maneras de colocar a las 5 mujeres y cinco hombres alternadamente.

11.9 Hay $C(15, 10)$ maneras de elegir 10 problemas de 15 posibles.

11.11 Hay $C(13, 5)$ maneras en elegir los números distintos que aparecerán en las cinco cartas. Para cada número hay cuatro palos distintos, por lo que tenemos en total $C(13, 5)4^5$ manos de póker que no tengan dos cartas del mismo número.

11.13 Hay 13 maneras de elegir el número que forma el par y hay $C(4, 2)$ formas de elegir los palos de este número. Luego tenemos 12 maneras de legir el número que forma la tercia y $C(4, 3)$ maneras de elegir los palos de este número, por lo que en total tenemos $13C(4, 2)12C(4, 3)$ manos de póker que son ful.

11.15 Hay 13 maneras de elegir el número que aparece 4 veces. Para la carta restante hay $12 \cdot 4$ posibilidades. Por lo tanto hay $13 \cdot 12 \cdot 4$ manos de póker que sean póker.

11.17 Hay $C(7,4)$ formas de elegir el número que aparece 4 veces. Por otra parte, hay 21 fichas que no son dobles, de las cuales debemos elegir 3, por lo que hay en total $C(7,4)C(21,3)$ manos de dominó que tienen exactamente cuatro fichas dobles.

11.19 Hay cuatro palos posibles. Si las cinco cartas son del mismo palo los números deben ser distintos, por lo que hay $4C(13,5) = 5148$ manos de póker que sean flor.

11.21 Por el principio de la suma tenemos $C(7,4)C(21,3)+C(7,5)C(21,2)+C(7,6)C(21,1)+C(7,7)C(21,0) = 51,108$ manos de dominó que tienen al menos cuatro fichas dobles.

Teorema del binomio

11.23

$$\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n-1)+(n+1)n}{2} = n^2.$$

Coeficientes multinomiales

11.25 ABRACADABRA tiene 10 letras, de las cuales 5 son A's, 2 son B's y las otras letras aparecen una vez. Por lo tanto hay

$$\frac{10!}{5!2!}$$

maneras distintas de ordenar las letras de esta palabra.

11.27 SUPERCALIFRAGILISTICO tiene 21 letras, de las cuales una letra aparece cuatro veces, cinco letras aparecen dos veces y las otras letras no se repiten, por lo que el número de permutaciones es:

$$\frac{21!}{4!(2!)^5}.$$

11.29 Hay $C(52,13)$ maneras de repartir 13 cartas a la primera persona, luego tenemos $C(39,13)$ formas de repartir 13 cartas a la segunda persona y por último hay $C(26,13)$ maneras de repartir 13 cartas a la tercera persona (las cartas restantes se dan a la última persona). Por lo tanto hay

$$C(52,13)C(39,13)C(26,13) = \frac{52!}{(13!)^4}$$

maneras de repartir las cartas.

Ecuaciones lineales diofantinas

11.31 Por el teorema 4.6 el número de soluciones es $C(47,4) = 178,65$.

11.33 Por el teorema 4.8 el número de soluciones es $C(21,3) = 1,330$.

Espacios finitos de probabilidad

11.35 (*a*) $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$. Por lo tanto $P(\emptyset) = 0$.
(*b*) $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$.
(*c*) $P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B_A) \geq P(A)$.

11.37 El número de manos de dominó es $C(28,7) = 1.184.040$. Además por el problema 21 el número de manos de dominó en el que aparecen al menos cuatro fichas dobles es 51.108. Por lo tanto, la probabilidad de que en una mano de dominó aparezcan al menos 4 fichas dobles es

$$\frac{51.108}{1,184,040}.$$

11.39 La probabilidad de que no salga cara es $1/2^n$, ya que hay 2^n resultados posibles, de los cuales solamente en uno de esos resultados no sale cara. de ahí que la probabilidad de que al menos una vez el resultado sea cara es:

$$1 - \frac{1}{2^n}.$$