Respuestas a los problemas impares del capítulo 12

Principio de inclusión-exclusión

12.1 El porcentaje de la población adulta que no lee ningún periódico es: $100 - (20 + 16 + 14) + (8 + 5 + 4) - 2 = 65$ por ciento.

12.3 Sean $A = \{(1, \ldots, 100\}$, $A_1 = \{a \in A \ : \ 2^2|a\}$, $A_2 = \{a \in A \ : \ 3^2|a\}$, $A_1 = \{a \in A \ : \ 5^2|a\}$, $A_1 = \{a \in A \ : \ 7^2|a\}$. Por lo tanto

$$|A_1| = 25, \quad |A_2| = 11, \quad |A_3| = 4, \quad |A_4| = 2,$$

$$|A_1 \cap A_2| = 2, \quad |A_1 \cap A_3| = 1,$$

las otras intersecciones son vacías, por lo tanto el número de enteros positivos menores o iguales que 100 que no tienen factores primos repetidos es:

$$100 - (25 + 11 + 4 + 2) + (2 + 1) = 61.$$

12.5 Escribiendo $y_i = x_i - 2$ para toda $i = 1, \ldots, 4$, obtenemos la ecuación equivalente:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 24, \qquad 0 \leq y_i \leq 13.$$

Sea

$$A = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \ : \ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 24, \quad 0 \leq y_i\}.$$

También definamos

$$A_i = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in A \ : \ y_i \geq 14\}.$$

Por lo tanto $|A_i| = C(13, 3)$, para toda i, además $|A_i \cap A_j| = 0$, para toda $i \neq j$. Por lo tanto el número de soluciones de la ecuación es:

$$C(27, 3) - 3C(13, 3) = 2,067.$$

12.7 Sea A el conjunto de permutaciones de las 26 letras del alfabeto. por lo tanto $|A| = 26!$. Sea A_1 el subconjunto de permutaciones en el que aparece la palabra RIO, equivalentemente A_1 es el conjunto de permutaciones de RIO (pensada como un solo objeto) y las otras 23 letras del alfabeto. Por lo tanto $|A_1| = 23!$. Análogamente, si A_2 es el subconjunto de permutaciones en el que aparece la palabra UVA y A_3 es el subconjunto de permutaciones en el que aparece la palabra SED, entonces $|A_2| = |A - 3| = 23!$. Además $|A_i \cap A_j| = 22!$ si $i \neq j$ y $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 20!$. Por lo tanto el número de permutaciones de las 26 letras del alfabeto en las que no aparecen ni la palabra RIO, ni la palabra UVA ni la palabra SED es:

$$26! - 3(24!) + 3(22!) - 20!.$$

12.9 Sea A el conjunto de asignaciones posibles, y para cada $i = 1, 2, 3$ sea A_i el conjunto de asignaciones en las que el Departamento i no recibe ningún empleado. Por lo tanto $|A| = 3^8$, $|A_i| = 2^8$, $|A_i \cap A_j| = 1$ si $i \neq j$ y $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$. Por lo tanto el número de asignaciones posibles en el que cada Departamento recibe al menos un empleado es:

$$3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 \cdot 1 = 5,796.$$

Observación: este problema es equivalente a contar el número de funciones suprayectivas de un conjunto con 8 elementos en un conjunto con 3 elementos.

12.11 Escribiendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3 - 3$, $y_4 = x_4 - 3$, obtenemos la ecuación equivalente:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13,$$

con $0 \leq y_1 \leq 5$, $0 \leq y_2 \leq 6$, $0 \leq y_3 \leq 4$, $0 \leq y_4 \leq 5$. Sea

$$A = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \ : \ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13, \quad 0 \leq y_i\}.$$

Por lo tanto $|A| = C(16, 3) = 560$. También definamos

$$A_1 = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in A \ : \ y_1 \geq 6\},$$

$$A_2 = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in A \ : \ y_2 \geq 7\},$$

$$A_3 = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in A \ : \ y_3 \geq 5\},$$

$$A_4 = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in A \ : \ y_4 \geq 6\}.$$

Por lo tanto $|A_1| = C(10,3) = 120$, $|A_2| = C(9,3) = 84$, $|A_3| = C(11,3) = 165$, $|A_4| = C(10,3) = 120$, $|A_1 \cap A_2| = 1$, $|A_1 \cap A_3| = C(5,3) = 10$, $|A_1 \cap A_4| = C(4,3) = 4$, $|A_2 \cap A_3| = C(4,3) = 4$, $|A_2 \cap A_4| = 1$, $|A_3 \cap A_4| = C(5,3) = 10$. Las otras intersecciones son vacías, por lo tanto el número de soluciones de la ecuación es:

$$560 - (120 + 84 + 165 + 120) + (1 + 10 + 4 + 4 + 1 + 10) = 101.$$

Aplicaciones especiales

12.13 $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, por lo tanto $\varphi(720) = 720(1-1/2)(1-1/3)(1-1/5) = 192$.

12.15 Sean $p_1, \ldots, p_r$ los factores primos de n. Por lo tanto $\varphi(n) = n(1-1/p-1)\cdots(1-1/p_r)$. Obsérvese que $1-1/p_i = (p_i-1)/p_i$, para toda i. El denominador se cancela con un factor de n, por otra parte $p_i - 1$ es igual a 1 (si $p_i = 2$) o es un número par, por lo que $\varphi(n)$ es el producto de un entero por un número par, y por lo tanto es par.

Extensión del principio de inclusión-exclusión

12.17 La probabilidad de que a exactamente una persona le toque su propio regalo es $nD_{n-1}/n! = D_{n-1}/(n-1)!$ este número se aproxima a $1/e$ cuando n es grande. Por otra parte, la probabilidad de que a ninguna persona le toque su propio regalo es $D_n/n!$ que también se aproxima a $1/e$ cuando n es grande.

12.19

$$\frac{1}{4!}\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!}$$