Respuestas a los problemas impares del capítulo 13

Funciones generadoras ordinarias

13.1 Si $a(x)b(x) = 1$, entonces

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 3n, \\ -1 & \text{si} \quad k = 3n+1, \\ 0 & \text{si} \quad k = 3n+2. \end{cases}$$

13.3

$$\begin{aligned} \frac{4-x}{(1+x)(3-x)} &= \frac{5}{4}\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3-x}\right) \\ &= \frac{5}{4}\left(\frac{1}{1-(-x)}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{1-(x/3)}\right) \\ &= \frac{5}{4}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k + \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5(-1)^k}{4} + \frac{1}{12\cdot 3^k}\right) x^k \end{aligned}$$

13.5

$$(x^5+x^6+x^7+\cdots)^4 = x^{20}(1+x+x^2+\cdots)^4 = \frac{x^{20}}{(1-x)^4} = x^{20}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k.$$

Por lo tanto

$$a_{63} = \binom{46}{43}.$$

Funciones generadoras ordinarias

13.7 (*a*) $2 + x + 3x^3 + 7x^4$.
(*b*)
$$2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots = \frac{2}{1-x}.$$

13.9
$$(1 + x + x^2 + \cdots)^{11} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+10}{k} x^k.$$

Por lo tanto
$$a_k = \binom{k+10}{k}.$$

13.11
$$\binom{k+3}{k}.$$

13.13 Buscamos el coeficiente de x^{500} en la función generadora:

$$(1+x^{10}+x^{20}+\cdots)(1+x^{20}+x^{40}+\cdots)(1+x^{50}+x^{100}+\cdots)(1+x^{100}+x^{200}+\cdots).$$

Particiones de enteros

13.15 $1+1+1+1+1+1$, $1+1+1+1+2$, $1+1+1+3$, $1+1+4$, $1+5$, $2+4$, 6, $1+2+3$, $1+1+2+2$, $2+2+2$, $3+3$.

13.17
$$(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+x^{12}+\cdots) = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^4}\right).$$

13.19
$$(1+x^2+x^4+x^6\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)(1+x^6+x^{12}+\cdots)\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^{2k}}\right).$$

13.21
$$(1+x^2+x^4+x^6\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)(1+x^6+x^{12}+\cdots)\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^{2k}}\right).$$

Funciones generadoras exponenciales

13.23

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)e^x(e^x-1)$$

$$=\frac{e^{3x}-e^{2x}+e^x-1}{2}=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^kx^k}{k!}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^kx^k}{k!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right]$$

Por lo tanto $a_0=0$ y

$$a_k=\frac{3^k-2^k+1}{2} \qquad k=1,2,3,\ldots$$

13.25

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)e^{2x}=\frac{e^{4x}-1}{4}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^kx^k}{k!}-\frac{1}{4}.$$

Por lo tanto $a_0=0$ y

$$a_k=4^{k-1} \qquad k=1,2,3,\ldots$$

13.27

$$2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)e^{2x}=\frac{e^{4x}-2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^kx^k}{k!}-\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto $a_0=0$ y

$$a_k=\frac{4^k}{2} \qquad k=1,2,3,\ldots$$

13.29 Hay dos casos, que el número de letras a y el número de letras c sea impar, o que el número de letras a y el número de letras c sea impar. Por lo tanto

$$a(x)=e^{2x}(\cosh x)^2+e^{2x}(\operatorname{senh} x)^2=\frac{1}{2}e^{4x}+\frac{1}{2}.$$

De ahí que $a_0=1$ y $a_k=4^k/2$ si $k=1,2,\ldots$

Ejercicios adicionales

13.31 Buscamos el coeficiente de x^{13} en la función generadora ordinaria:

$$a(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 = \left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4$$

Este coeficiente es

$$a_{13} = \binom{16}{13} - 4\binom{10}{7} + 6\binom{4}{1}.$$

13.33 Queremos determinar el número de soluciones enteras de la ecuación

$$x_1 + \cdots + x_8 = 19,$$

con $1 \leq x_j \leq 6$. Es decir, buscamos el coeficiente de x^{19} en la función generadora ordinaria:

$$a(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^9)^8 = \left(\frac{1 - x^9}{1 - x}\right)^8$$

Este coeficiente es

$$a_{19} = \binom{26}{19} - \binom{8}{1}\binom{17}{10} + \binom{8}{2}\binom{8}{1}.$$

13.35 Buscamos el número de funciones suprayectivas de un conjunto de 27 elementos en un conjunto con 3 elementos, este número es

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (-1)^k (3 - k)^{27}$$