Respuestas a los problemas impares del capítulo 14

Recurrencias lineales de orden uno

14.1 Por inducción. Si $k = 0$ el resultado se cumple por definición. Supongamos que la afirmación es cierta para $k - 1$, por lo tanto

$$a_k = Aa_{k-1} + B = A\left(\frac{B}{1-A}\right) + B = \frac{B}{1-A}.$$

14.3 $a_k = 1 + 5k$.

14.5 $a_k = 2 + k(k+1)(2k+1)/6$.

14.7 Obsérvese que $a_0 = 1$. Supongamos que conocemos a_{k-1}. Al añadir una nueva recta $\mathcal{L}_k$ ésta intersecta a cada una de las $k-1$ rectas anteriores en un solo punto. Los $k-1$ puntos de intersección separan a la recta $\mathcal{L}_k$ en k secciones, cada una de las cuales divide una región ya existente en dos partes. Por lo tanto $a_k = a_{k-1} + k$ para toda $k \geq 1$. La solución de esta recurrencia es

$$a_k = 1 + \frac{k(k+1)}{2}.$$

Recurrencias lineales homogéneas de orden 2

14.9 Polinomio característico: $x^2 - 3x + 2$; $a_k = 1 + 2^k$.

14.11 Polinomio característico: $x^2 - 2x + 2$;

$$a_k = 2(\sqrt{2})^k \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) 2 + (\sqrt{2})^k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right).$$

14.13 Polinomio característico: $x^2 + 4x + 4$; $a_k = 2(-2)^k + 9k(-2)^{k-1}$.

14.15 Polinomio característico: $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4$;

$$a_k = 3(2)^k \cos(k\pi/6) + (1 - 3\sqrt{3})2^k \operatorname{sen}(k\pi/6).$$

Solución por funciones generadoras

14.17

$$a(x) = \frac{4}{1-2x} - \frac{3}{1-x},$$

de ahí que

$$a_k = 4 \cdot 2^k - 3$$

14.19

$$a(x) = \frac{7}{1-3x} - \frac{4}{1-4x},$$

de ahí que

$$a_k = 7 \cdot 3^k - 4^{k+1}$$

14.21

$$a(x) = \frac{13}{4(1-5x)} - \frac{1}{4(1-x)} - \frac{1}{(1-x)^2},$$

de ahí que

$$a_k = \frac{13}{4}5^k - \frac{1}{4} - (k+1)$$

14.23

$$a(x) = \frac{-5}{1-2x} + \frac{3}{1-x} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{6}{(1-x)^3},$$

de ahí que

$$a_k = -5 \cdot 2^k + 3k^2 + 6k + 6.$$

Ejercicios adicionales

14.25 $a_k = 2\cos(k\pi/2) + 3\,\mathrm{sen}(k\pi/2)$.

14.27

$$a(x) = \frac{20}{1-2x} - \frac{9}{1-x} - \frac{3}{(1-x)^2} - \frac{6}{(1-x)^3},$$

de ahí que $a_k = 20(2^k) - 3k^2 - 12k - 18$.

14.29* $a_1 = 1$, $a_1 = 3$,

$$a_{k+1} = a_k + 2k(2k-1)a_{k-2}, \qquad \forall\ k \geq 2.$$

Justificación: Sean $\{J_1, \ldots, J_{2k}, J_{2k+1}, J_{2k+2}\}$ un conjunto de $2(k+1)$ jugadores.
Caso 1. Si J_{2k+1} juega contra J_{2k+2}, los otros k partidos se realizan entre los primeros $2k$ jugadores, esto se puede hacer de a_k formas.
Caso 2. Si J_{2k+1} no juega contra J_{2k+2}, hay $2k$ contrincantes posibles para J_{2k+1}. Una vez elegido un contrincante para él hay $2k-1$ contrincantes posibles para J_{k+2}. Los otros partidos se realizan entre los restantes $2(k-2)$ jugadores (hay a_{k-2} maneras de programar estos partidos).