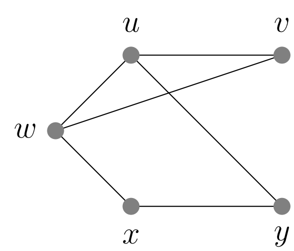
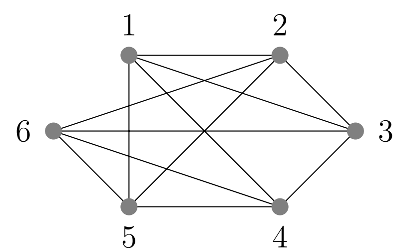
Respuestas a los problemas impares del capítulo 15

Grafos y subgrafos

15.1

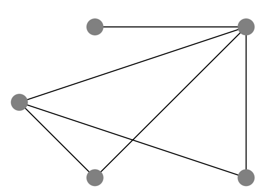


15.3

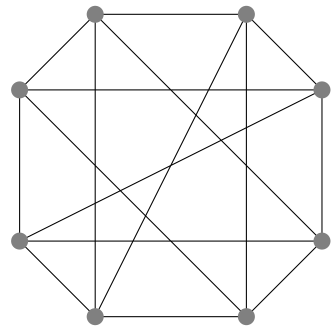


15.5 Si la bipartición de V está dada por $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ y $Y = \{y_1, \ldots, y_s\}$, podemos enumerar los vértices como $\{v_1, \ldots, v_{r+s}\}$, donde $v_i = x_i$ para toda $i = 1, \ldots, r$ y $v_{r+j} = y_j$ para toda $j = 1, \ldots, s$.

15.7

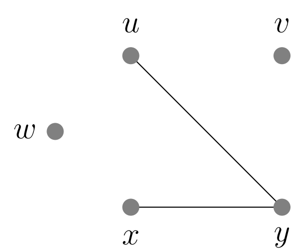


15.9

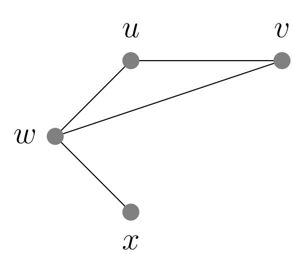


15.11 Por el teorema 15.1, $2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = nk$.

15.13 (a)



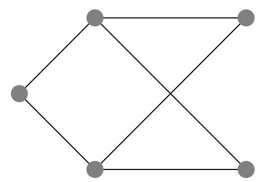
(b)



15.15 Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito y sea $V' \subseteq (X \cup Y)$. Definamos $X' = V' \cap X$ y $Y' = V' \cap Y$. Es claro que $V' = X' \cup Y'$ y que $X' \cap Y' = \emptyset$, además toda arista de $G[V']$ debe tener un extremo en X' y otro extremo en Y', por lo que $G[V']$ es bipartita.

Caminos y grafos conexos

15.17



15.19 Los vértices de corte son f y g. El único puente es la arista que une los vértices f y g.

15.21 Si $d(u,v) = \infty$ o $d(v,w) = \infty$ el resultado es trivialmente cierto. Supongamos ahora que $d(u,v) < \infty$ y $d(v,w) < \infty$. Sea P la (u,w)-trayectoria más corta y sea v otro vértice.
Caso 1. Si $v \in V(P)$ entonces la (u,v)-sección de P es la (u,v)-trayectoria más corta y la (v,w)-sección es la (v,w)-trayectoria más corta. Por lo tanto $d(u,w) = d(u,v) + d(v,w)$.
Caso 2. Si $v \notin V(P)$ sea Q la (u,v)-trayectoria más corta y sea R la (v,w)-trayectoria más corta. Por lo tanto $Q \circ R$ es una (u,w)-trayectoria. De ahí que la longitud de P es menor o igual que la longitud de $Q \circ R$, es decir, $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

Grafos isomorfos

15.23 El primer grafo tiene un camino de longitud 8, mientras que la longitud máxima de un camino en el segundo grafo es seis, por lo tanto los grafos no son isomorfos.

15.25 Sea φ un isomorfismo de G en H. Observemos que

$$uv \in E(G^c) \Leftrightarrow uv \notin E(G) \Leftrightarrow \quad \varphi(u)\varphi(v) \notin E(H) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H^c).$$

Por lo tanto φ también es un isomorfismo de G^c en H^c. Recíprocamente, si φ es un isomorfismo de G^c en H^c entonces φ es un isomorfismo de G en H.

15.27 Sean $\varphi(u), \varphi(v) \in V(H)$. Como G es conexo existe un (u,v)-camino en G, de ahí que, por el ejercicio anterior, existe un $(\varphi(u), \varphi(v))$-camino en H. Por lo tanto H es conexo.

15.29
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

15.31 Como $W = (v_1, \dots, v_k)$ es un camino en G entonces $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para todo $i = 1, \dots, k-1$. Como φ es un isomorfismo de G en H entonces $\varphi(v_i)\varphi(v_{i+1}) \in E(G)$, de ahí que $\varphi(W) = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k))$ es un camino en H.

15.33 Isomorfo a C_n.

Paseos Eulerianos

15.35 El grafo de Petersen no es Euleriano porque es 3-regular.

15.37 K_n es $n-1$-regular, por lo tanto K_n es Euleriano si y sólo si n es impar.

Ejercicios adicionales

15.39 Cada vértice es un arreglo ordenado de longitud k de ceros y unos. Como en cada entrada tenemos 2 posibilidades tenemos en total 2^k vértices. Sea X el conjunto de vértices que tienen un número impar de unos y sea Y el conjunto de vértices que tienen un número par de unos. Como dos vértices son adyacentes si y sólo si difieren en exactamente un elemento, entonces es claro que cada arista tiene un extremo en X y un extremo en Y. Por lo tanto Q_k es bipartito. Observemos además que cada vértice de Q_k tiene grado k, por lo tanto $2|E(Q_k)| = k2^k$, de ahí que $|E(Q_k)| = k2^{k-1}$.

15.41 Como $|E| = k|X|$ y $|E| = k|Y|$ y $k \neq 0$, se sigue que $|X| = |Y|$.

15.43 Sea $uv \in E$. Como G tiene cuello 4 entonces $N(u) \cap N(v) = \emptyset$. Como además $|N(u)| = |N(v)| = k$, se sigue que $|V| \geq |N(u) \cup N(v)| = 2k$.

15.45 Si G es autocomplementario entonces $|E(G)| = |E(G^c)|$. Como además
$$|E(G)| + |E(G^c)| = \binom{n}{2},$$

se sigue que $|E(G)| = n(n-1)/4$. Es decir, $n^2 \equiv n \pmod{4}$. Pero esto sólo es posible si $n = 4k$ o $n = 4k+1$ para algún entero k.