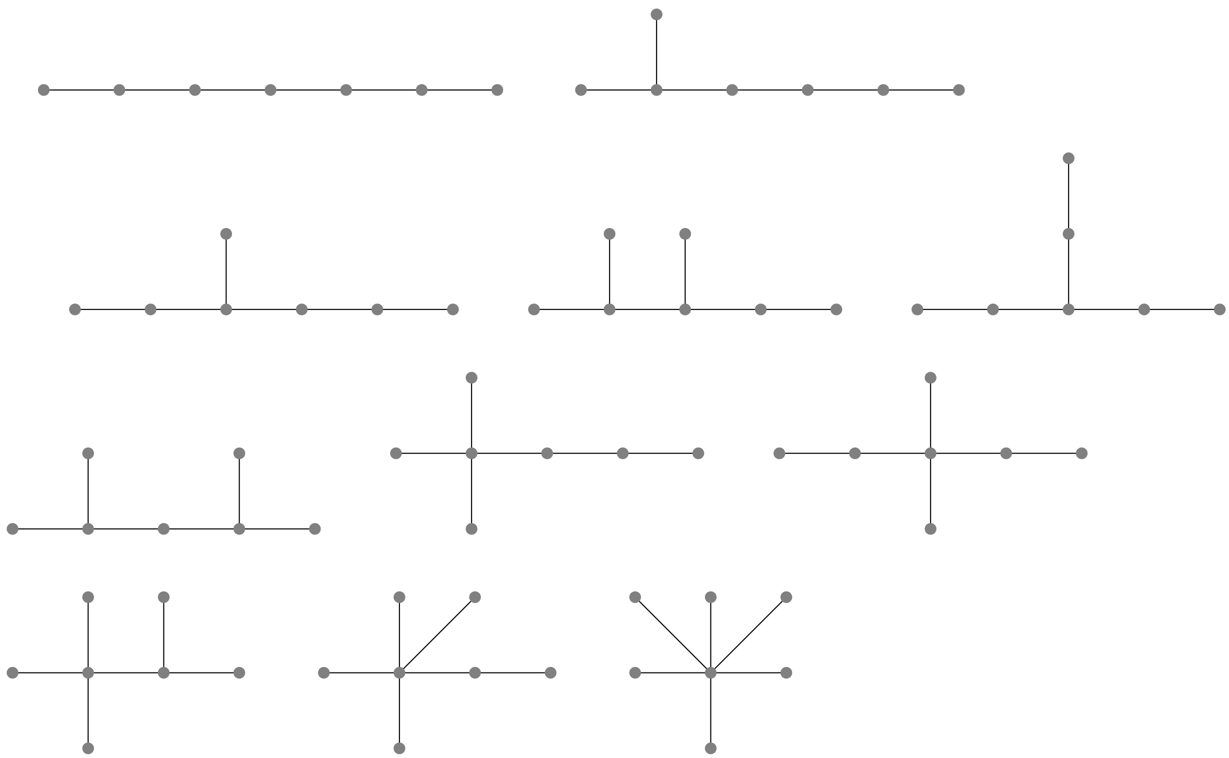
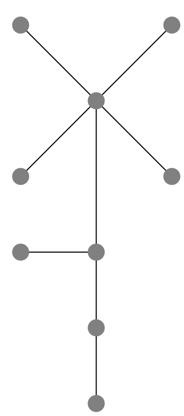
Respuestas a los problemas impares del capítulo 16

Propiedades de árboles

16.1



16.3



16.5 Sea k el número de componentes conexas de G y sean $T_1, \ldots, T_k$ las componentes conexas. Como G es un bosque cada T_i es un árbol. Por lo tanto $|E(T_i)| = |V(T_i)| - 1$. De ahí que

$$|V(G)| - |E(G)| = \sum_{i=1}^{k} (|V(T_i)| - |E(T_i)|) = k.$$

16.7 Por el ejercicio anterior, el número de componentes conexas de G es

$$n - (n-1) = 1.$$

Por lo tanto G es conexo. Como además G es acíclico, se sigue que G es un árbol.

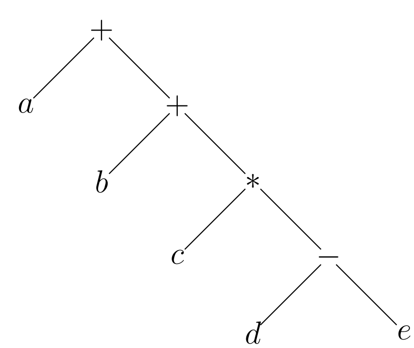
16.9 Sea T un árbol de recubrimiento de G. Por lo tanto T tiene al menos 2 vértices de grado 1, digamos u y v. Por lo tanto u y v no son vértices de corte de T, pero como T es árbol de recubrimiento de G entonces u y v tampoco son vértices de corte de G.

Árboles con raíz

16.11 Sea t el número de vértices terminales. Cada vértice, excepto el vértice raíz es el hijo de un vértice interno, por lo tanto $|V(T)| = nk + 1$. De ahí que el número de vértices terminales es igual a

$$t = (nk + 1) - k = k(n - 1) + 1 = nk - k + 1.$$

16.13



Contando árboles

16.15 Determine los árboles con 8 vértices correspondientes a los siguientes códigos de Prüfer:

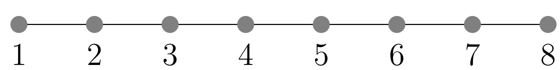
a) $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$

b) $(2, 3, 4, 5, 6, 7)$

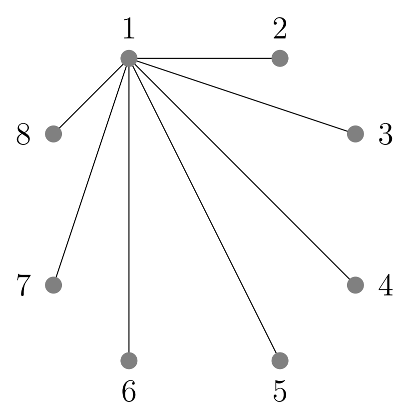
c) $(2, 3, 4, 5, 6, 6)$

d) $(3, 3, 4, 5, 6, 6)$

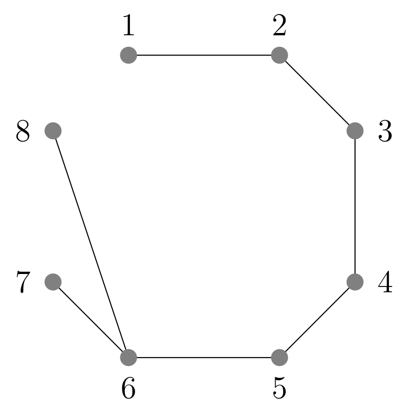
16.15 (a)



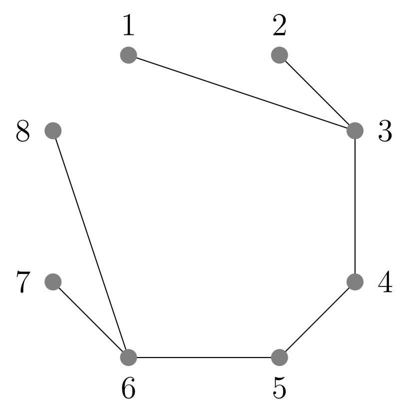
(b)



(c)



(d)



16.17 Hay 12 trayectorias: $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$, $(3,2)$, $(4,2)$, $(4,3)$ y 4 estrellas; $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ y $(4,4)$.

Árboles de búsqueda

16.19 Por inducción sobre $k =$ número de vértices del árbol. Si $k = 1$ entonces el único vértice del árbol es r, por lo que el resultado es trivialmente cierto. Supongamos ahora que la afirmación es verdadera si el número de vértices del árbol es menor que k, y consideremos un árbol de búsqueda T con k vértices.

Caso 1. Si $v \in V(T)$ no es un vértice terminal, entonces v es un vértice en un árbol de búsqueda en anchura con menos de k vértices (obtenido removiendo los sucesores de v en el árbol). Por lo que, por hipótesis de

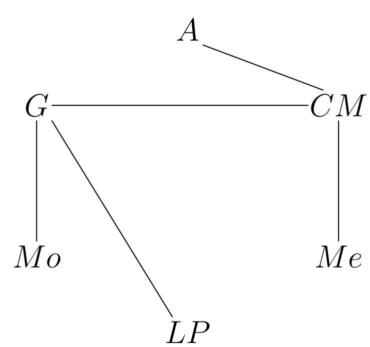
inducción, la única (r, v)-trayectoria es la trayectoria más corta de r a v.
Caso 2. Si v es un vértice terminal, entonces $T' = T - v$ es un árbol de búsqueda con $k - 1$ vértices. Sea u el antecesor de v en T y sea P la única (r, u)-trayectoria en T'. Por hipótesis de inducción ésta es la trayectoria más corta de r a u. Ahora bien, en el algoritmo BPA el vértice u es explorado antes que cualquier vecino de v, por lo tanto $P + uv$ es la (r, v)-trayectoria más corta de r a v.

16.21

$T_1 := (\{s\}, \emptyset)$, $X := \{s\}$; $Y := V - X$, $k := 1$; $ord(s) := 1$.
Insertar s en L.
mientras $L \neq \emptyset$ **hacer**
  seleccionar $u \in L$;
    si $N^+(u) \cap Y = \emptyset$ remover u de L;
    en otro caso elegir $v \in N^+(u) \cap Y$;
    $X := X \cup \{v\}$; $Y := Y - \{v\}$; $k := k + 1$;
    $T_k := T_{k-1} + (u, v)$; $ord(v) := k$;
    insertar v en L.
 devolver $T := T_k$ y ord.

Árbol de recubrimiento mínimo

16.23

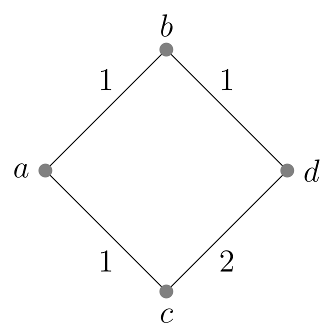


16.25

1. Ordenar las aristas de G, de modo que $u(e_1) \geq \ldots \geq u(e_m)$.
2. $T := (V(G), \emptyset)$.
3. **para** $i := 1$ **hasta** m hacer
4. **si** $T + e_i$ es acíclica
5. **entonces** $T := T + e_i$.
6. **devolver** T.

16.27 Supongamos que G tiene dos árboles de recubrimiento mínimo distintos, digamos T y T'. Sea e la arista de costo mínimo que pertenece a un árbol pero que no pertenece al otro. Sin pérdida de generalidad $e \in E(T)$, por lo tanto $T'+e$ tiene un ciclo C. Sea $f \in E(C)$ tal que $f \in E(T')-E(T)$. Por lo tanto $T'' = T'+e-f$ es un árbol de recubrimiento de G. Como $c(f) > c(e)$ se sigue que $c(T'') = c(T')+c(e)-c(f) < c(T')$, lo cual contradice que T' es un árbol óptimo. Por lo tanto G tiene un único árbol de recubrimiento de costo mínimo.

16.29 Falso. Consideremos por ejemplo el siguiente grafo:



El árbol óptimo está formado por las aristas de costo 1. El costo de la trayectoria (c, a, b, d) es tres, sin embargo la distancia más corta de c a d es 2.