Respuestas a los problemas impares del capítulo 17

Grafos dirigidos

17.1 Si (u, v) es un arco, entonces $u \in N^-(v)$, por lo tanto $d^-(v)$ es igual al número de arcos que tienen a v como extremo terminal, por lo tanto

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = m.$$

Análogamente

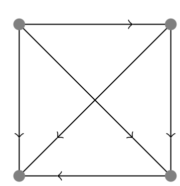
$$\sum_{v \in V} d^+(v) = m.$$

17.3 Por inducción sobre $n = |V(G)|$. Si $n = 1$ el resultado es trivialmente cierto. Supongamos ahora que el resultado es cierto para cualquier digrafo acíclico con n vértices, y sea D un digrafo acíclico con $n + 1$ vértices. Por el ejercicio anterior, existe un vértice u tal que $d^-(u) = 0$. Sea $v_1 = u$ y sea $D' = D - v_1$. Como D' es acíclico, podemos reetiquetar los vértices como $v_2, \ldots, v_n$ de modo que si $(v_i, v_j) \in A(D')$ entonces $i < j$. Por lo tanto $v_1, v_2, \ldots, v_n$ satisface que si $(v_i, v_j) \in A(D)$ entonces $i < j$.

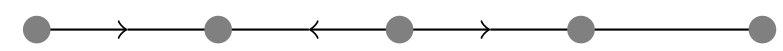
Grafos orientados y torneos

17.5 Cada arista uv puede tener dos orientaciones (u, v) y (v, u). Por lo tanto hay 2^m orientaciones.

17.7 (a) Una orientación transitiva de C_4 es:

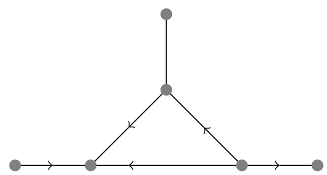


(b) Al tratar de obtener una orientación transitiva para C_5 llegamos a una situación como la que muestra la siguiente figura:



Es claro que no podemos asignar una orientación a la arista restante, por lo que C_5 no es un grafo de comparabilidad.

17.9 Al tratar de obtener una orientación transitiva llegamos a una situación como muestra la figura:



Es claro que no podemos asignar una orientación a la arista restante, por lo que el grafo no es de comparabilidad.

17.11 Por inducción sobre n. Si $n = 1$ entonces $d^+(v_1) = 1 - 1$. Supongamos el resultado cierto para n. Sea D un torneo transitivo con $n+1$ vértices y sea $\gamma = (w_1, \ldots, w_{n-1})$ una trayectoria Hamiltoniana dirigida en D. Como D es transitivo, $w_j \in N^+(w_1)$ para todo $j \neq 1$. Por lo tanto $d^+(w_1) = n - 1$. Sea $D' = D - w_1$. Por lo tanto D' es un torneo de orden n. Por lo que, por hipótesis de inducción, podemos etiquetar los vértices como $u_1, \ldots, u_n$ de modo que $d^+_{D'}(u_j) = n - j$. Definamos $v_1 = w_1$ y $v_{j+1} = u_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Por lo tanto $d^+(v_1) = n$ y $d^+(v_{j+1}) = (n - j) + 1 = (n + 1) - j$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Cerradura transitiva

17.13 La sucesión de matrices es:

$$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

17.15 La sucesión de matrices es:

$$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ruta más corta

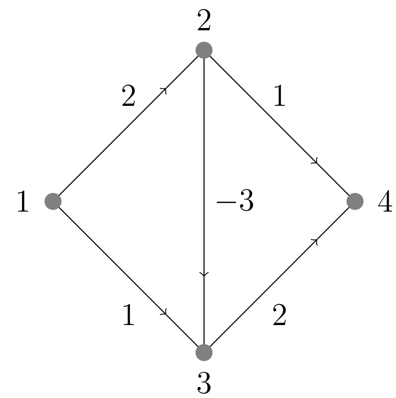
17.17 La idea es asignar a cada vértice $j \neq 1$ una etiqueta $E(j)$, indicando el antecesor de j. El algoritmo queda como sigue:

1. **para** $j := 1$ **hasta** n hacer $u_j = d_{1j}$, $E(j) = 1$ si $j \in N^+(1)$.
2. $T := \{2, 3, \ldots, n\}$.
3. **mientras** $T \neq \emptyset$
4. hallar $k \in T$ tal que $u_k = \text{mín}\{u_j \mid j \in T\}$.
5. $T := T - \{k\}$.
6. Para cada $j \in T \cap N^+(k)$ si $u_k + c_{kj} < u_j$
7. $u_j := u_k + c_{kj}$, $E(j) := k$.

Un camino más corto de 1 a j puede encontrarse usando las etiquetas $E(j)$:

$$1, \ldots, E(E(j)), E(j), j$$

17.19 Consideremos por ejemplo el digrafo:



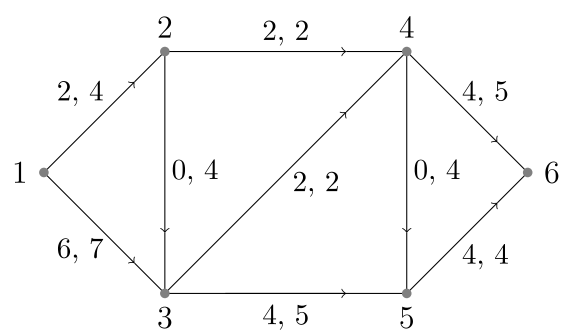
Con el algoritmo de Dijkstra $u_4 = 3$, sin embargo la distancia más corta de 1 a 4 es 1.

17.21 Consideremos un camino óptimo de i a j cuyos vértices interiores pertenezcan al conjunto $\{1, \ldots, k\}$. Hay dos posibilidades: que el camino no tenga a k como vértice interior o que si lo tenga. En el primer caso $f_{ij}^{(k)} = f_{ij}^{(k-1)}$, mientras que en el segundo caso $f_{ij}^{(k)} = f_{ik}^{(k-1)} + f_{kj}^{(k-1)}$.

17.23 En cada entrada de la matriz F^k se hacen dos operaciones (una suma y una comparación), por lo tanto se realizan $2n^2$ operaciones. Por lo tanto, para calcular las n matrices se efectúan $n(2n^2) = 2n^3$ operaciones. De ahí que la complejidad computacional del algoritmo de Floyd-Warshall es $O(n^3)$.

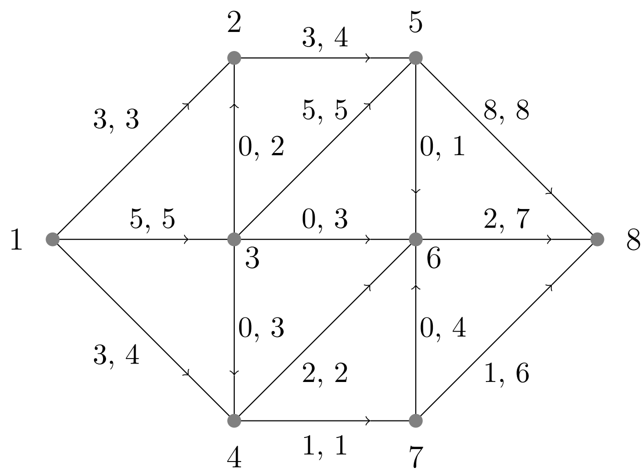
Flujo en redes

17.25 La figura de abajo muestra un flujo máximo con valor 8.



Un corte mínimo está dado por: $\{(2,4),(3,4),(5,6)\}$.

17.27 El valor del flujo máximo es 11.



Un corte mínimo está dado por: $\{(1,2),(1,3),(4,6),(4,7)\}$.

17.29 En el paso 3 si i es un vértice etiquetado pero inexplorado y si $j \in N^{-}(i)$, j no está etiquetado y $f_{ji} > b_{ij}$, calcular

$$\delta_j = \text{mín}\{\delta_i, f_{ji} - b_{ij}\}$$

y asignar a j la etiqueta $E_j = (i^{-}, \delta_j)$.