Respuestas a los problemas impares del capítulo 2

Axiomas de los enteros

2.1 Si $a = 2n$ y $b = 2m$, entonces $a + b = 2n + 2m = 2(n + m)$ y $ab = (2n)(2m) = 2(2nm)$.

2.3 Si $a = 2n$ y $b = 2m+1$, entonces $a+b = 2n+(2m+1) = 2(n+m)+1$.

2.5 Si a es par, entonces a^2 es par. Si a es impar, entonces a^2 es impar, equivalentemente, si a^2 es par, entonces a es par.

2.7 Si $a = b$ entonces $a - b = 0$, por lo que no se puede cancelar en la ecuación $(a - b)(a + b) = (a - b)b$.

2.9 $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k + 1, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$, equivalentemente,
$\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Orden en los números enteros

2.11 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2.13 $\{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2, \ k = 1, \ldots, 50\}$, equivalentemente,
$\{k^2 \mid k = 1, \ldots, 50\}$,

Inducción matemática

2.15 Si $n = 1$, entonces

$$1^2 = \frac{1(1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)}{6},$$

por lo que la igualdad se cumple en este caso. Supongamos que la fórmula es cierta para n, por lo tanto

$$\begin{aligned}1+4+9+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

2.17 Si $n=1$, entonces

$$1^2=\frac{1(2-1)(2+1)}{3},$$

por lo que la igualdad se cumple en este caso. Supongamos que la fórmula es cierta para n, por lo tanto

$$\begin{aligned}1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2+(2n+1)^2 &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}+(2n+1)^2\\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1)+3(2n+1)^2}{3}\\ &= \frac{(2n+1)[n(2n-1)+3(n+1)]}{3}\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.\end{aligned}$$

2.19 Si $n=1$, entonces

$$1(2)=\frac{1(2)(3)}{3},$$

por lo que la igualdad se cumple en este caso. Supongamos que la fórmula es cierta para n, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
1(2) + 2(3) + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}
\end{aligned}
$$

2.21 $1 < 2^1$, por lo que la desigualdad es válida si $n = 1$. Supongamos que $n < 2^n$. Por lo tanto $n + 1 < 2^2 + 1 < 2^n + 2^n = 2(2^n) = 2^{n+1}$.

2.23 $4(6) = 24 \leq 29 = 6^2 - 7$, por lo que la desigualdad es cierta para $n = 6$. Supongamos que $4n \leq n^2 - 7$. Por lo tanto $4(n+1) = 4n + 4 \leq (n^2 - 7) + 4 = n^2 - 3 \leq n^2 + 2n - 6 = (n+1)^2 - 7$.

2.25 $5^2 = 25 < 32 = 2^5$, por lo que la desigualdad es válida para $n = 5$. Supongamos que $n^2 < 2^n$. Por lo tanto $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + (2n+1) < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, ya que $2n + 1 < 2^n$.

2.27 El paso inductivo no es válido si $n = 1$, porque al considerar el conjunto de chicas obtenido al remover R_n, excluiríamos a R_1, la chica que sabemos que tiene los ojos azules, por lo que no podríamos aplicar la hipótesis de inducción a este conjunto.

2.29 La inducción se hace sobre n, manteniendo m fijo. La fórmula es cierta para $n = 1$ porque $(a^m)^1 = a^m = a^{m1}$. Supongamos ahora que $(a^m)^n = a^{mn}$. Por lo tanto $(a^m)^{n+1} = (a^m)^n a^m = a^{mn} a^m = a^{(n+1)}$.

2.31 La base de la inducción es trivial. Supongamos que $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} ca_k$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} ca_k &= \sum_{k=1}^{n} ca_k + ca_{n+1}\\ &= c\sum_{k=1}^{n} a_k + ca_{n+1}\\ &= c\sum_{k=1}^{n+1} a_k.\end{aligned}$$

Ejercicios adicionales

2.33 Si $2+3k \in A$, entonces $2+3k = 3(k+1)-1 \in B$. Recíprocamente, si $3n-1 \in B$, entonces $3n-1 = 2+3(n-1) \in A$.

2.35 Si $1 < x$, entonces $x < x^2$ (multiplicando por x). Supongamos que $x < x^n$, por lo tanto $x^2 < x^{n+1}$, pero como $x < x^2$, se sigue que $x < x^{n+1}$.

2.37 Por hipótesis $0 < a < b$, equivalentemente, $0 < a^1 < b^1$, por lo que el resultado es cierto se $n = 1$. Supongamos ahora que $a^n < b^n$. Multiplicando por $a > 0$ obtenemos $0 < a^{n+1} < ab^n$. Por otra parte, como $a < b$ tenemos que $ab^n < b^{n+1}$, de ahí que $0 < a^{n+1} < b^{n+1}$.

2.39 El resultado se cumple trivialmente si $n = 1$. Supongamos ahora que tenemos un segmento de longitud $\sqrt{n}$ y construyamos un triángulo rectángulo con este segmento como uno de los catetos y con el otro cateto de longitud 1. Por el teorema de pitágoras la hipotenusa tiene longitud $\sqrt{n+1}$.

2.41 Si $n = 1$ entonces $2! = 2 < 2^2(1!)^2 = 4$, por lo que se cumple la desigualdad. Supongamos ahora que $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$. Por lo tanto $(2(n+1))! = (2n+2)(2n+1)(2n)! < (2n+2)(2n+1)2^{2n}(n!)^2 < (2n+2)(2n+2)2^{2n}(n!) = 2^2(n+1)^2 2^{2n}(n!) = 2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2$.

2.43 Si $n = 1$ entonces $1 \leq 2 - 1/1 = 1$, por lo que la desigualdad se cumple. Supongamos que el resultado es cierto para n, por lo tanto

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} = 2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} < 2-\frac{1}{n+1}.$$

La última desigualdad se cumple porque $1 < (n^2+n+1)/(n^2+n)$.