Respuestas a los problemas impares del capítulo 3

Divisibilidad

3.1 Los divisores propios de 496 son 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, y tenemos que

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496.$$

Los divisores propios de 8128 son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064, y tenemos que

$$1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064 = 8128.$$

3.3 $ac|bc$ implica que $bc = acq = (aq)c$, de ahí que $b = aq$, y por lo tanto $a|b$.

3.5 (a) $561 = 103(5) + 46$, por lo tanto $q = 5$ y $r = 46$. (b) $-213 = 57(-4) + 15$, por lo tanto $q = -4$ y $r = 15$. (c) $1024 = 13(78) + 10$, por lo tanto $q = 78$ y $r = 10$.

3.7 Es claro que $7|(11^1 - 4^1)$. Supongamos que $11^n - 4^n = 7q$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 11^{n+1} - 4^{n+1} &= 11(11^n) - 4(4^n) \\ &= 11(7q + 4^n) - 4(4^n) \\ &= 7(11q + 4^n). \end{aligned}$$

Es decir, $7|(11^{n+1} - 4^{n+1})$.

3.9 $5^1 - 4(1) - 1 = 0$ es divisible entre 16. Supongamos que $5^n - 4n - 1 = 16q$, por lo tanto

$$\begin{aligned} 5^{n+1} - 4(n+1) - 1 &= 5(5^n) - 4n - 5 \\ &= 5(16q + 4n + 1) - 4n - 5 \\ &= 16(5q + n), \end{aligned}$$

es divisible entre 16.

Números primos

3.11 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149,151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293.

Cambio de base

3.13 $(1010011100001)_2$.

3.15 $(54102)_7$.

3.17 $(32A29)_{16}$.

3.19 $(1100010100101011)_2$.

3.21

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Máximo común divisor

3.23

$$\begin{aligned} 105 &= 90(1) + 15 \\ 90 &= 15(6) + 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $mcd(105, 90) = 15$. Además $15 = 105 - 90$.

3.25 $d = ax + by$ es la combinación lineal positiva mínima de a y b. Por lo tanto

$$1 = (a/d)x + (b/d)y$$

es la combinación lineal positiva mínima de a/d y b/d. De ahí que $mcd(a/d, b/d) = 1$.

3.27 $mcd(3, 9) = 3$, y $3 \nmid 17$. Por lo tanto la ecuación no tiene soluciones enteras.

3.29 $x = 2 + 3n, \quad y = -5n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.31 $mcd(156, 39, -104, 208) = mcd(mcd(156, 39), -104, 208) = mcd(39, -104, 208) = mcd(mcd(39, -104), 208) = mcd(3, 208) = 1$.

Teorema fundamental de la aritmética

3.33 (*a*) $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$;
(*b*) $1274{=}2 \cdot 7^2 \cdot 13$;
(*c*) $1925 = 5^2 \cdot 7 \cdot 11$;
(*d*) $8!{=}2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

3.35 $9! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, por lo que el cubo perfecto más pequeño divisble entre $9!$ es $2^9 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^3 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)^3 = (2520)^3$.

3.37 $mcd(a, b) = 3 \cdot 7 \cdot 11$, $mcm(a, b) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^3 \cdot 23$.

Ejercicios adicionales

3.39 $1^3 + 3(1^2) + 2(1) = 6$ es múltiplo de 3. Supongamos que $n^3 + 3n^2 + 2n = 3q$. Por lo tanto $(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1) = 3(q + n^2 + 3n + 2)$ es múltiplo de 3.

3.41 $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$. Como $a-1, a, a+1$ son tres enteros consecutivos, alguno debe ser múltiplo de tres.

3.43 Si $d|a$ y $d|b$, entonces $d|a$ y $d|ac+b$. Recíprocamente, si $d|ac+b$, entonces $ac+b = dq$, de modo que $b = dq - ac$, por lo que si además $d|a$, entonces $d|b$. De modo que todo divisor común de a y d es un divisor común de a y $ac + b$. Por lo tanto $mcd(a, b) = mcd(a, ac + b)$.

3.45 Si $p|a^n$, entonces $p|a$, porque p es primo. Por lo tanto existe un entero q tal que $a = pq$. De ahí que $a^n = p^n q^n$, y por lo tanto $p^n|a^n$.