Respuestas a los problemas impares del capítulo 4

Producto cartesiano

4.1 Supongamos que $C \times D \subseteq A \times B$. Si $c \in C$ y $d \in D$, entonces $(c, d) \in C \times D$, y por lo tanto $(c, d) \in A \times B$, de ahí que $c \in A$ y $d \in B$, por lo tanto $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$. Recíprocamente, supongamos que $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$ y sea $(c, d) \in C \times D$. Por lo tanto $c \in C$ y $d \in D$, y de ahí que $c \in A$ y $d \in B$, por lo tanto $(c, d) \in A \times B$, lo cual prueba que $C \times D \subseteq A \times B$.

4.3

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \cap B,\ y \in C \cap D \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y) \in A \times C \quad \text{y} \quad (x, y) \in B \times D \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D). \end{aligned}$$

Funciones

4.5 (b) y (d).

4.7 (a) Si $x \notin \mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < x < n+1$. Por lo tanto $\lfloor x \rfloor = n$, $\lceil x \rceil = n + 1$. De ahí que $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = (n + 1) - n = 1$.

(b) Si $x \notin \mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < x < n + 1$. De ahí que $n - 1 < x - 1 < n$ y $n + 1 < x + 1 < n + 2$. Por lo tanto $x - 1 < n < x < n + 1 < x + 1$, y de ahí que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil < x + 1.$$

Por otra parte, si $x = n \in Z$, entonces $\lfloor x \rfloor = n = \lceil x \rceil$. Por lo que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil < x + 1.$$

4.9 (a) $\Psi_{A^c}(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A^c \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A \quad \Leftrightarrow \quad \Psi_A(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$ $1 - \Psi_A(x) = 1$.

(b) $\Psi_{A-B} = \Psi_{A \cap B^c} = \Psi_A \Psi_{B^c} = \Psi_A(1 - \Psi_B) = \Psi_A - \Psi_A \Psi_B$.

4.11

$$\begin{aligned}\Psi_{(A\oplus B)\oplus C} &= \Psi_{A\oplus B} + \Psi_C - 2\Psi_{A\oplus B}\Psi_C \\ &= (\Psi_A + \Psi_B - 2\Psi_A\Psi_B) + \Psi_C - 2(\Psi_A + \Psi_B - 2\Psi_A\Psi_B)\Psi_C \\ &= \Psi_A + \Psi_B + \Psi_C - 2\Psi_A\Psi_B - 2\Psi_A\Psi_C - 2\Psi_B\Psi_C + 4\Psi_A\Psi_B\Psi_C.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\Psi_{A\oplus(B\oplus C)} &= \Psi_A + \Psi_{B\oplus C} - 2\Psi_A\Psi_{B\oplus C} \\ &= \Psi_A + (\Psi_B + \Psi_C - 2\Psi_B\Psi_C) - 2\Psi_A(\Psi_B + \Psi_C - 2\Psi_B\Psi_C) \\ &= \Psi_A + \Psi_B + \Psi_C - 2\Psi_B\Psi_C - 2\Psi_A\Psi_B - 2\Psi_A\Psi_C + 4\Psi_A\Psi_B\Psi_C.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

4.13 (a) Supongamos que existe $x \in f^{-1}(\emptyset)$. Por lo tanto $f(x) \in \emptyset$, lo cual no es posible. Por lo tanto $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Si $a \in f^{-1}(V)$, entonces $f(a) \in V$. Como $V \subseteq W$, por lo tanto $f(a) \in W$, de ahí que $a \in f^{-1}(W)$, con lo cual concluimos que $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$.

(c) $a \in f^{-1}(V \cap W) \;\Leftrightarrow\; f(a) \in V \cap W \;\Leftrightarrow\; f(a) \in V$ y $f(a) \in W \Leftrightarrow\; a \in f^{-1}(V)$ y $a \in f^{-1}(W) \;\Leftrightarrow\; a \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$.

(d) $a \in f^{-1}(V \cup W) \;\Leftrightarrow\; f(a) \in V \cup W \;\Leftrightarrow\; f(a) \in V$ o $f(a) \in W \Leftrightarrow\; a \in f^{-1}(V)$ o $a \in f^{-1}(W) \;\Leftrightarrow\; a \in f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$.

Funciones biyectivas

4.15 $f(n) = f(m) \Rightarrow 5n - 2 = 5m - 2 \Rightarrow 5n = 5m \Rightarrow n = m$. Por lo tanto f es inyectiva. No es suprayectiva, porque, por ejemplo, $f(n) = 5n-2 \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.17 No es inyectiva, porque $f(-1) = 1 = f(1)$. Tampoco es suprayectiva, porque $f(n) \neq -1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

4.19 No es inyectiva, porque por ejemplo, $f(1, 2) = f(2, 1)$. Si es suprayectiva, porque si $m \in \mathbb{Z}$, entonces $f(1, m) = m$.

Composición de funciones

4.21 Sea $x \in A$. Por lo tanto $(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$. Por otra parte, $h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$. De ahí que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

4.23 $f(a) = f(b)$ implica que $g(f(a)) = g(f(b))$. Es decir, $g \circ f(a) = g \circ f(b)$. Como $g \circ f$ es inyectiva se sigue que $a = b$, y por lo tanto f es inyectiva.

4.25 Sea $c \in C$. Como $g \circ f$ es suprayectiva, existe $a \in A$ tal que $g \circ f(a) = c$. Escribiendo $b = f(a)$, tenemos que $g(b) = g(f(a)) = c$, por lo tanto g es suprayectiva.

4.27 $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(x)))) = g(g^{-1}(x)) = x$. Análogamente $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$. Por lo tanto $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$.

Conjuntos finitos

4.29 Para cada $k = 1, \ldots, n$, sea $f(k)$ el número de amigos de la persona k. Supongamos que f es inyectiva, por lo tanto $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ son n números distintos del conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, por lo tanto existen i, j tales que $f(i) = 0$ y $f(j) = n-1$, lo cual significa que i no conoce a nadie del grupo y j conoce a todos los del grupo, lo cual no es posible.

4.31 $A = (A-B) \cup B$. Como $(A-B) \cap B = \emptyset$, por lo tanto $|A| = |A-B| + |B|$ y de ahí que $|A - B| = |A| - |B|$.

4.33 Por inducción sobre m. Si $m = 1$ el resultado es trivialmente cierto. Supongamos que

$$|A_1 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdots |A_m|.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |A_1 \times \cdots \times A_m \times A_{m+1}| &= |A_1 \times \cdots \times A_m||A_{m+1}| \\ &= |A_1| \cdots |A_m||A_{m+1}|. \end{aligned}$$

4.35 3^5 tiene 6 divisores positivos, 7^6 tiene 7 divisores, 11^3 tiene 4 divisores y 13^2 tiene 3 divisores. Por lo tanto, por el principio del producto, $3^5 \cdot 7^6 \cdot 11^3 \cdot 13^2$ tiene $6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3$ divisores positivos.

4.37 Hay dos posibilidades para cada posición, por lo que, por el principio del producto hay 2^n palabras.

4.39 4^{25}.

4.41 (a) $4!3!2! = 288$. (b) $3!(4!3!2!) = 1728$, porque hay $3!$ casos posibles similares a los del inciso anterior.

Principio de la pichonera

4.43 Si a lo más 3 personas nacen en el mismo mes tendríamos a lo más 36 personas.

4.45 51.

4.47 Sea n el número de jugadores. Cada jugador tiene al menos una victoria y a lo más $n-1$ victorias, es decir, hay $n-1$ resultados posibles, por lo que debe haber 2 jugadores con el mismo número de victorias.

Conjuntos infinitos

4.49 Sea A el conjunto de enteros pares y sea B el conjunto de enteros impares. Definamos $f : A \to B$ como $f(a) = a+1$ (obsérvese que como a es par entonces $a+1$ es impar). Si $f(a) = f(b)$ entonces $a+1 = b+1$ y de ahí que $a = b$. Por lo tanto f es inyectiva. Además si b es un entero impar entonces $b-1$ es par y además $f(b-1) = b$, por lo tanto f es biyectiva.

4.51 Sea A el conjunto de enteros pares y B el conjunto de enteros impares. Ambos conjuntos son infinitos, sin embargo, $A \cap B = \emptyset$ es finito.

4.53 Sea P el conjunto de numeros primos. Como $P \subseteq \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es numerable, se sigue que P es a lo más numerable. Como además P es infinito entonces tiene que ser numerable.

Operaciones binarias

4.55 No, por ejemplo $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, pero $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.

4.57 No es asociativa, por ejemplo, $(2*3)*4 = (6+1)*4 = 28+1 = 29$, pero $2*(3*4) = 2*(12+1) = 26+1 = 27$. Es conmutativa porque $a*b = ab+1 = ba+1 = b*a$.

4.59

$$(a*b)*c = \left(\frac{ab}{2}\right)*c = \frac{(ab)c}{4} = \frac{a(bc)}{4} = a*\left(\frac{bc}{2}\right) = a*(b*c),$$

por lo tanto $*$ es asociativa. También

$$a*b = \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2} = b*a,$$

por lo tanto $*$ es conmutativa.

4.61 **4.6.**

$*$	a	b	c	d
a	b	c	a	b
b	c	a	c	b
c	a	c	d	a
d	b	b	a	c

4.63 $[(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (ad+bc, bd)*(e,f) = (adf+bcf+bde, bdf)$. Por otra parte, $(a,b)*[(c,d)*(e,f)] = (a,b)*(cf+de, df) = (adf+bcf+bde, bdf)$. Por lo tanto la operación es asociativa. También es conmutativa, porque $(c,d)*(a,b) = (cb+da, db) = (ad+bc, bd) = (a,b)*(c,d)$.

4.65 Determine el más pequeño subconjunto A de $\mathbb{Z}$ tal que $3 \in A$ y la suma es una operación binaria en A.

4.65 Sea $A = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Por lo tanto $3 = 3(1) \in A$. Además la suma usual es una operación binaria en A, porque $3n+3m = 3(n+m) \in A$. Por último, si $B \subseteq \mathbb{Z}$ es tal que $3 \in B$ y la suma es cerrada, entonces $3+\cdots+3 = 3n \in B$. Por lo tanto $A \subseteq B$.

4.67 $A+B = (a_{ij}+b_{ij}) = (b_{ij}+a_{ij}) = B+A$.

4.69

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

pero

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$