Respuestas a los problemas impares del capítulo 5

Relaciones binarias

5.1 Es reflexiva, simétrica y transitiva.

5.3 R es reflexiva, porque $a + a = 2a$ es par. Si aRb entonces $a + b$ es par y por lo tanto $b + a$ es par. De modo que R es simétrica. Por último, si aRb y bRc, entonces $a + b = 2n$ y $b + c = 2m$, por lo tanto $a + c = (2n - b) + (2m - b) = 2(n + m - b)$ es par y de ahí que aRc, por lo tanto R es transitiva.

5.5 R no es reflexiva, porque $a > a + 1$ es falso. No es simétrica, porque si aRb entonces $a > b + 1$, por lo que no es posible que $b > a + 1$. R es transitiva, porque si aRB y bRC, entonces $a > b + 1$ y $b > c + 1$, y de ahí que $a > c + 2 > c + 1$, es decir, aRc.

5.7 $(a, b)R(a, b)$, porque $a = a$, de modo que R es reflexiva. Si $(a, b)R(c, d)$ entonces $a = c$ y por lo tanto $(c, d)R(a, b)$, es decir, R es simétrica. Por último, si $(a, b)R(c, d)$ y $(c, d)R(e, f)$, entonces $a = c$ y $c = e$, y por lo tanto $a = e$, de modo que $(a, b)R(e, f)$, y por lo tanto R es transitiva.

5.9 No es reflexiva, porque si $v \neq \emptyset$ entonces $V \cap V = V \neq \emptyset$. Es simétrica porque si $V\ R\ W$ entonces $W \cap V = v \cap W = \emptyset$, por lo tanto $W\ R\ V$. No es transitiva, porque si $V = \{1, 2\}$, $W = \{3\}$ y $U = \{1, 4\}$, entonces $V \cap W = \emptyset$ y $W \cap U = \emptyset$, pero $V \cap U = \{1\} \neq \emptyset$.

5.11 (a) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$ y por lo tanto R es negativamente transitiva.

Relaciones de equivalencia

5.13 No, porque no es reflexiva.

5.15 aRa porque $3|0$. Si aRb entonces $3|(b - a)$, de ahi que también $3|(a - b)$, por lo tanto bRa. Por último, si aRb y bRc, entonces $3|(b - a)$ y $3|(c - b)$, de ahí que 3 divide a $(b - a) + (c - b) = c - a$, por lo tanto aRc. La partición inducida por R es: $\{3, 6, 9, 12, 15\}$, $\{4, 7, 10, 13\}$ y $\{5, 8, 11, 14\}$.

5.17 $(a,b)R(a,b)$ porque $b=b$. Si $(a,b)R(c,d)$ entonces $b=d$, de ahí que $(c,d)R(a,b)$. Si $(a,b)R(c,d)$ y $(c,d)R(e,f)$, entonces $b=d$ y $d=f$, de ahí que $b=f$ y por lo tanto $8a,b)R(e,f)$. La partición inducida po R es: $\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$, $\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2)\}$, $\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$ y $\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4)\}$.

5.19 No porque no es simétrica, por ejemplo, $2|4$, pero $4 \nmid 2$.

5.21 No porque no es reflexiva.

5.23 No porque no es reflexiva.

5.25 No necesariamente, porque si $a(R\cup S)b$ y $b(R\cup S)c$ podría ser que aRb y bSc, con lo cual no podríamos concluir que $a(R\cup S)c$.

5.27 Para toda $i\in I$ y para toda $j\in J$ sabemos que $A_i\neq\emptyset$ y $B_j\neq\emptyset$, de ahí que $A_i\times B_j\neq\emptyset$. Si $i\neq r$ o $j\neq s$, entonces $A_i\cap A_r=\emptyset$ o $B_j\cap B_s=\emptyset$, de ahí que $(A_i\times B_j)\cap(A_r\times B_s)=\emptyset$. Por último, como $\bigcup_{i\in I}A_i=A$ y $\bigcup_{j\in J}B_j=B$, tenemos que $\bigcup_{i\in I,j\in J}\ A_i\times B_j=A\times B$.

La matriz de una relación

5.29

$$M_{R^{-1}}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

5.31

$$M_{RS}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

5.33 Cerradura transitiva:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$