Respuestas a los problemas impares del capítulo 6

Relaciones de orden

6.1 No, porque no es completa. Por ejemplo, $(1,3) \not\preceq (3,1)$ y $(3,1) \not\preceq (1,3)$.

6.3 Para probar que la relación es completa, sean (a,b) y (c,d) en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y consideremos cuatro casos. Caso 1, si $a < c$ entonces $(a,b) \preceq (c,d)$. Caso 2, si $a = c$ y $b \leq d$, entonces $(a,b) \preceq (c,d)$. Caso 3, si $a = c$ y $d < b$, entonces $(c,d) \preceq (a,b)$. Caso 4, si $a > c$ entonces $(c,d) \preceq (a,b)$. Para probar que la relación es transitiva, supongamos que $(a,b) \preceq (c,d)$ y $(c,d) \preceq (e,f)$. Caso 1, si $a < c$ y $c < e$ entonces $a < e$ y por lo tanto $(a,b) \preceq (e,f)$. Caso 2, si $a < c$ y $(c = e$ y $d \leq f)$, entonces $a < e$ y por lo tanto $(a,b) \preceq (e,f)$. Caso 3, si $(a = c$ y $b \leq d)$ y $c < e$ entonces $a < e$ y por lo tanto $(a,b) \preceq (e,f)$. Caso 4, si $(a = c$ y $b \leq d)$ y $(c = e$ y $d \leq f)$, entonces $a = e$ y $b \leq f$ y por lo tanto $(a,b) \preceq (e,f)$. Para probar la antisimetría, supongamos que $(a,b) \preceq (c,d)$ y $(c,d) \preceq (a,b)$. Si $a < c$ entonces como $c \leq a$, se sigue que $a < a$, lo cual no es posible. Por lo tanto $a = c$ y de ahí que $b \leq d$. por otra parte, como $(c,d) \preceq (a,b)$ y $c = a$, se sigue que $d \leq b$, por lo tanto $b = d$, con lo cual concluimos que $(a,b) = (c,d)$.

6.5 No, porque no es antisimétrica, por ejemplo, $2R(-2)$ y $(-2)R2$, pero $2 \neq -2$.

6.7 $a \preceq a$ para toda $a \in A$, porque $a = a$, por lo tanto $\preceq$ es reflexiva. Si $a \preceq b$ y $b \preceq a$ entonces $(a \prec b$ o $a = b)$ y $(b \prec a$ o $b = a)$. No puede ser que $a \prec b$ y $b \prec a$, porque $\prec$ es asimétrica, por lo tanto $a = b$, de ahí que $\preceq$ es antisimétrica. Para probar la transitividad observemos que si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $(a \prec b$ o $a = b)$ y $(b \prec c$ o $b = c)$. Si $a \prec b$ y $b \prec c$ entonces $a \prec c$, porque $\prec$ es transitiva. De ahí que $a \preceq c$. Si $a \prec b$ y $b = c$ entonces $a \preceq c$. Si $a = b$ y $b \prec c$ entonces $a \preceq$. Por último, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$ y por lo tanto $a \preceq c$.

Retículos

6.9 Por definición $a \wedge (b \wedge c) \preceq a$. También $a \wedge (b \wedge c) \preceq b \wedge c \preceq b$. Por lo tanto $a \wedge (b \wedge c)$ es cota inferior de $\{a, b\}$, y de ahí que $a \wedge (b \wedge c) \preceq a \wedge b$. Por otra parte, $a \wedge (b \wedge c) \preceq b \wedge c \preceq c$, por lo tanto $a \wedge (b \wedge c)$ es cota inferior de $\{a \wedge b, c\}$. De ahí que $a \wedge (b \wedge c) \preceq (a \wedge b) \wedge c$. Análogamente, $(a \wedge b) \wedge c \preceq a \wedge (b \wedge c)$, por lo que, por antisimetría, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

6.11 (a) $a \preceq a$, porque $\preceq$ es reflexiva. Por lo tanto $a \sim a$, de ahí que $\sim$ es reflexiva. Supongamos ahora que $a \sim b$. Por lo tanto $a \preceq b$ y $b \preceq a$, de ahí que $b \preceq a$ y $a \preceq b$, y por lo tanto $b \sim a$, es decir, $\sim$ es simétrica. Por último, supongamos que $a \sim b$ y $b \sim c$. Por lo tanto ($a \preceq b$ y $b \preceq a$) y ($b \preceq c$ y $c \preceq b$), de ahí que $a \preceq c$ y $c \preceq a$, porque $\preceq$ es transitiva, y por lo tanto $a \sim c$, es decir, $\sim$ es transitiva.

(b) Si $[a'] \in [a]$ entonces $a \sim a'$ y por lo tanto $a \preceq a'$ y $a' \preceq a$. Análogamente, si $[b'] \in [b]$ entonces $b \sim b'$ y por lo tanto $b \preceq b'$ y $b' \preceq b$. Por lo tanto $a' \preceq b'$ implica que $a \preceq a' \preceq b' \preceq b$, es decir $a \preceq b$. Análogamente, $a \preceq b$ implica que $a' \preceq a \preceq b \preceq b'$, y de ahí que $a \preceq b$.

(c) Sean $[a], [b] \in A^*$. Como $\preceq$ es completa, tenemos que $a \preceq b$ o $b \preceq a$. Por lo tanto $[a] \preceq^* [b]$ o $[b] \preceq^* [a]$, de ahí que $\preceq^*$ es completa. Si $[a] \preceq^* [b]$ y $[b] \preceq^* [c]$ entonces $a \preceq b$ y $b \preceq c$ y de ahí que $a \preceq c$, porque $\preceq$ es transitiva. Por lo tanto $[a] \preceq^* [c]$, con lo cual concluimos que $\preceq^*$ es transitiva. Por último, si $[a] \preceq^* [b]$ y $[b] \preceq^* [a]$, entonces $a \preceq b$ y $b \preceq a$ y de ahí que $a \sim b$ y por lo tanto $[a] = [b]$, lo cual muestra que $\preceq^*$ es antisimétrica.

6.13 Sabemos que $a \preceq a$ para todo $a \in A$, en particular si $a \in A'$, de ahí que $a \preceq' a$ para todo $a \in A'$, es decir, $\preceq'$ es reflexiva. Las propiedades de simetría y transitividad se verifican similarmente.

Álgebras Booleanas

6.15 No, porque aunque se cumplen B1, B2, B4, B5 y la segunda ley distributiva, no se cumple la primera ley distributiva, por ejemplo: $1 \vee (2 \wedge 3) = 1 + (2 \cdot 3) = 7$, pero $(1 \vee 2) \wedge (1 \vee 3) = (1 + 2) \cdot (1 + 3) = 3 \cdot 4 = 12$.

Orden en álgebras Booleanas

6.17 $a \preceq b \;\Rightarrow\; a = a \wedge b \;\Rightarrow\; a \vee c = (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) \preceq b \vee c$. Por lo tanto $a \vee c \preceq b \vee c$.

6.19 Sea $b \in B_2$ arbitrario pero fijo. Como f es biyectiva existe un único $a \in B_1$ tal que $f(a) = b$. Por lo tanto $b \vee f(0_1) 0 f(a) \vee f(0_1) = f(a \vee 0_1) = f(a) = b$, y $b \wedge f(1_1) 0 f(a) \wedge f(1_1) = f(a \wedge 1_1) = f(a) = b$. Por lo tanto $f(0_1) = 0_2$ y $f(1_1) = 1_2$.

Expresiones y funciones Booleanas

6.21

x_1	x_2	x_3	x_2'	$x_1 \vee x_2'$	$x_2' \vee x_3$	$(x_1 \vee x_2') \wedge (x_2' \vee x_3)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1

6.23 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1' \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1' \wedge x_2 \wedge x_3') \vee (x_1' \wedge x_2' \wedge x_3')$.

6.25 La tabla correspondiente a la expresión $(x_1 \vee x_2') \wedge x_3$ es:

x_1	x_2	x_3	$(x_1 \vee x_2') \wedge x_3$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Por lo tanto la forma normal disyuntiva de la expresión es:

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2' \wedge x_3) \vee (x_1' \wedge x_2' \wedge x_3).$$

6.27 B_n tiene 2^n elementos. Para cada elemento hay dos posibles valores, de ahí que $\mathcal{F}_n$ tiene $2^{2^n} = 4^n$ elementos.

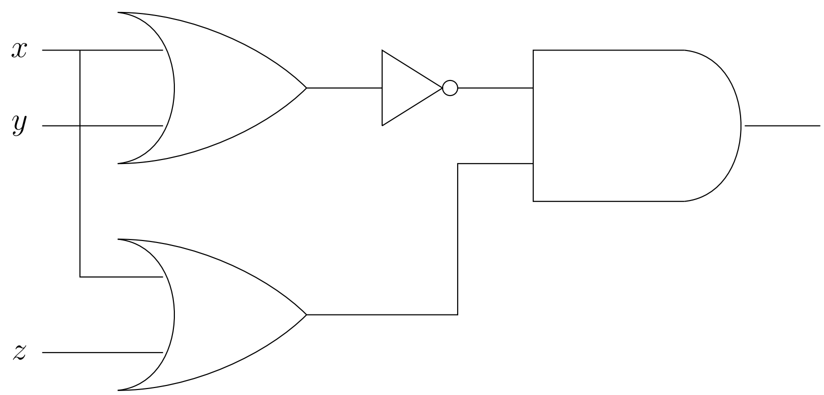
Simplificación de expresiones booleanas

6.29 Un rectángulo es: $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3') \vee (x_1 \wedge x_2' \wedge x_3') = x_1 \wedge x_3'$. Otro rectángulo es: $(x_1' \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1' \wedge x_2' \wedge x_3) = x_1' \wedge x_3$. Por lo que la expresión booleana es: $(x_1 \wedge x_3') \vee (x_1' \wedge x_3)$.

6.31 El cuadrado representa la expresión x_2, mientras que el rectángulo representa la expresión $x_2' \wedge x_3$. Por lo que la expresión booleana es: $x_2 \vee (x_2' \wedge x_3)$.

Circuitos lógicos

6.33



6.35 (b) $(x \vee y) \wedge [(x \wedge y) \vee z] = (x \wedge y) \vee [(x \vee y) \wedge z]$