Respuestas a los problemas impares del capítulo 7

Funciones recursivas

7.1 Dominio de f_1: $\{2k \mid \ k \in \mathbb{N}_0\}$, dominio de f_2: $\{3k \mid \ k \in \mathbb{N}_0\}$, dominio de la composición: $\{6k \mid \ k \in \mathbb{N}_0\}$. Regla de correspondencia de la composición: $h(a) = 5a/6$.

7.3 Sea $g(a, b) = ab$. Definamos $f(0) = 1$ y $f(a + 1) = g(2, f(a))$.

7.5 $|a - b| = D(a, b) + D(b, a)$.

7.7 $A(2, 2) = 7$.

7.9 Por inducción sobre n. $A(1, 0) = A(0, 1) = 1+1 = 2 = 0+2$, por lo que se cumple para $n = 0$. Supongamos ahora que $A(1, n) = n + 2$, por lo tanto, $A(1, n+1) = A(0, A(1, n)) = A(0, n+2) = (n+2)+1 = (n+1)+2$.

7.11 $A(3, 0) = A(2, 1) = 5 = 8 \cdot 2^0 - 3$. Supongamos que $A(3, n) = 8 \cdot 2^n - 3$. Por lo tanto, $A(3, n + 1) = A(2, A(3, n)) = A(2, 8 \cdot 2^n - 3)$, ahora bien, por el ejercicio anterior, $A(2, 8 \cdot 2^n - 3) = 2(8 \cdot 2^n - 3) + 3 = 8 \cdot 2^{n+1} - 3$.

Máquinas de Turing

7.13 $(s_0, 0, \sqcup, s_1)$, $(s_0, 1, \sqcup, s_1)$, $(s_1, \sqcup, \rightarrow, s_0)$, $(s_0, \sqcup, \sqcup, s_2)$.

7.15 $(s_0, 0, \rightarrow, s_0)$, $(s_0, 1, \rightarrow, s_1)$, $(s_1, 1, \sqcup, s_2)$, $(s_2, \sqcup, \rightarrow, s_1)$, $(s_1, \sqcup, \sqcup, s_3)$.

7.17 El resultado aparece después de un espacio en blanco, adelante del número. $(s_0, 0, \rightarrow, s_1)$, $(s_1, 1, \rightarrow, s_2)$, $(s_2, 1, \rightarrow, s_0)$, $(s_0, 1, \rightarrow, s_1)$, $(s_1, \sqcup, \rightarrow, s_3)$, $(s_3, \sqcup, 0, s_3)$, $(s_2, \sqcup, \rightarrow, s_4)$, $(s_4, \sqcup, 1, s_4)$, $(s_0, \sqcup, \rightarrow, s_5)$, $(s_5, \sqcup, 2, s_5)$.

Complejidad computacional

7.19 Es claro que

$$n^3 \leq 2n^3 - 5n + 6 \leq 2n^3$$

si $n \geq 2$. Por lo tanto $f(n)$ es $\Theta(n^3)$.

7.21 Si n es suficientemente grande entonces

$$n^2 \leq \frac{2n^3+3}{n+2}.$$

Por lo tanto $f(n)$ es $\Omega(n^2)$.

7.23 Si $f(n) \leq K\,g(n)$ entonces $cf(n) \leq (cK)\,g(n)$.

7.25 Por el ejercicio anterior, $f_1(n) + f_2(n) \leq K\,(g(n) + g(n)) = (2K)\,g(n)$.

7.27 Por inducción sobre k y utilizando el resultado del ejercicio anterior.

Ejercicios adicionales

7.29 Cada máquina de Turing es un subconjunto finito de

$$S \times A \times A \cup \{\rightarrow, \leftarrow\} \times S,$$

como A y S son finitos el conjunto de máquinas de Turing es unión numerable de conjuntos finitos y por lo tanto numerable.