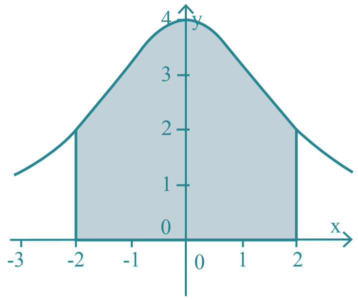
Respuestas a la evaluación de la competencia del capítulo 3

En los ejercicios del 1 al 7, dibuja la región que queda comprendida bajo la gráfica de la función dada en el intervalo indicado y calcula el área bajo la curva.

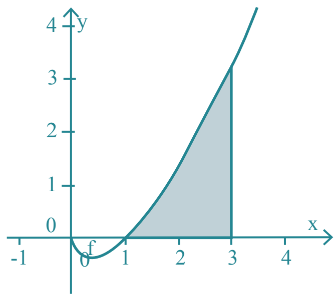
1. $f(x)=\dfrac{16}{x^2+4}$, $-2\le x\le 2$

A=4π



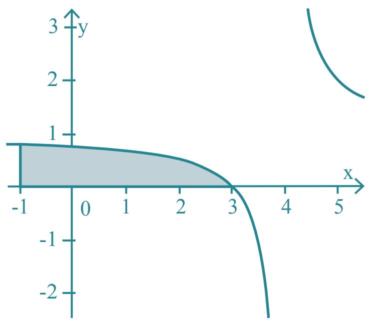
2. $f(x)=x\ln x$, $1\le x\le 3$

A ≈ 2.9438

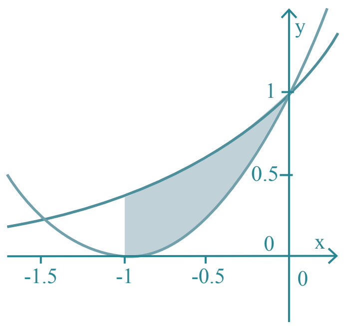


3. $f(x)=\dfrac{x-3}{x-4}$, $-1\le x\le 3$

A ≈ 2.3906

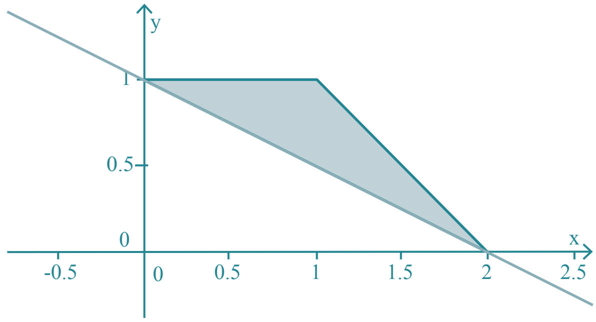


4. $f(x)=e^{x}$, $g(x)=(x+1)^{2}$ y $-1\le x\le 0\approx 0.2988$



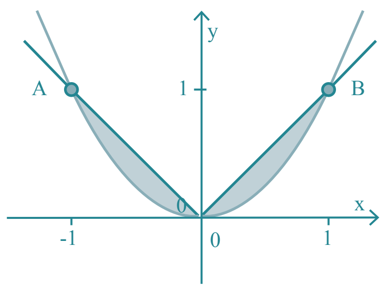
5. $y=\begin{cases}-1 & \text{si } 0\le x\le 1\\ -x+2 & \text{si } 1<x\le 2\end{cases}$ y $y=-\frac{1}{2}x+2$

$\mathrm{A}=\frac{1}{2}$

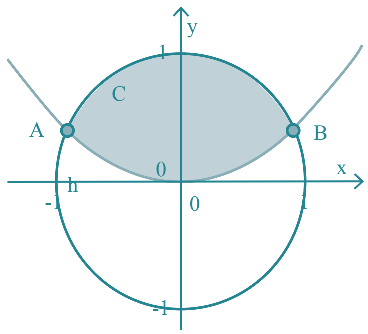


6. $y=|x|$ y $y=x^{2}$

$\mathrm{A}=\frac{1}{3}$

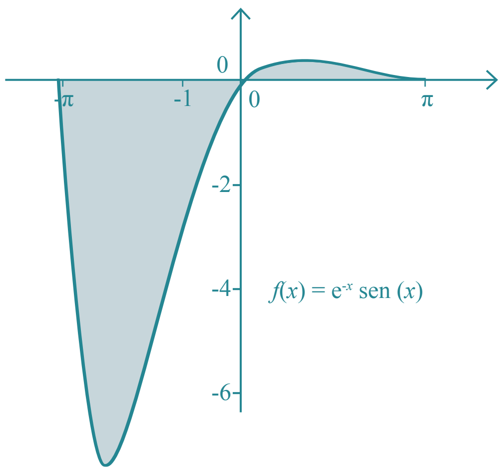


7. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ y } y^2 = 1 \approx 1.26939$

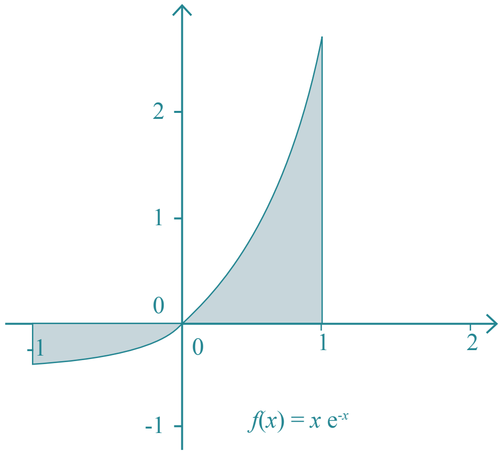


En los ejercicios del 8 al 12 calcula el área total mostrada en la figura.

8.

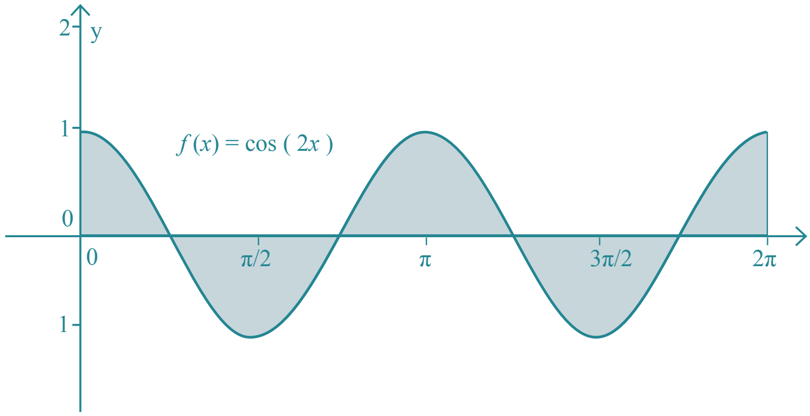


9.



$A \approx 1.2642$

10.

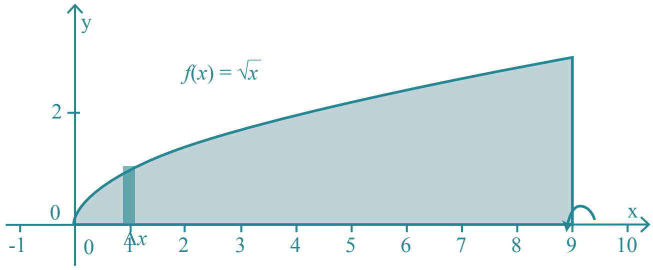


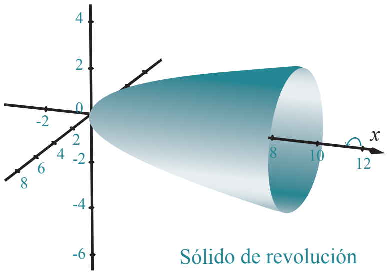
A = 4

En los ejercicios 11 al 14, gráfica la región acotada por las ecuaciones dadas, luego formula y evalúa la integral que da el volumen del sólido generado al rotar la región alrededor del eje indicado. Selecciona el método más apropiado. Verifica el resultado con el comando **Integral** de Geogebra.

11. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 9$ alrededor del eje x

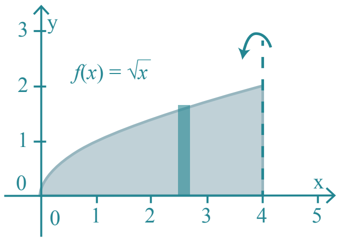
$$V = \frac{81}{2}\pi$$

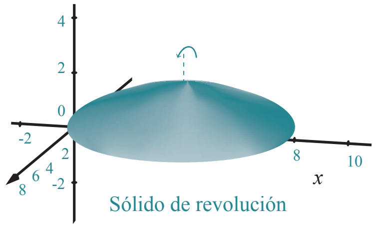




12. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$ alrededor de la recta vertical $x = 4$

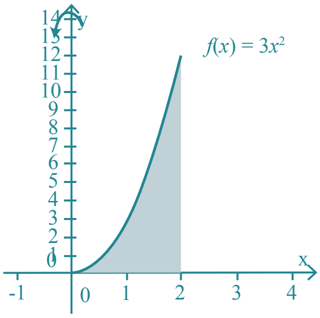
$$V = \frac{256}{15}\pi$$

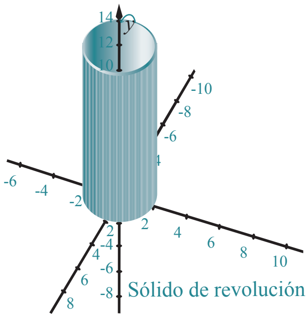




13. $y = 3x^2,\ x = 0,\ \mathrm{y} = 2$ alrededor del eje y

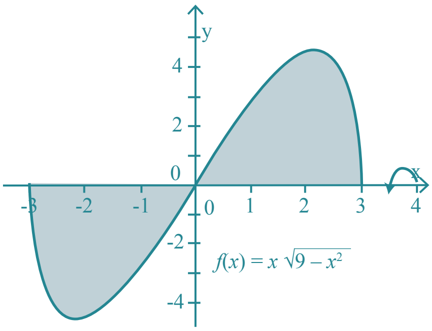
$\mathrm{V} = 24\pi$

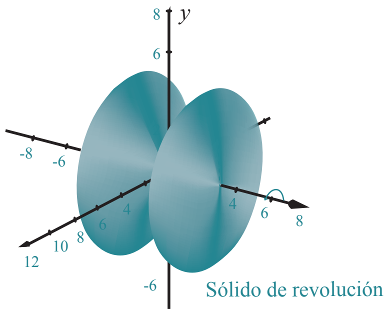




14. $y = x\sqrt{9-x^2},\ y = 0$ alrededor del eje x

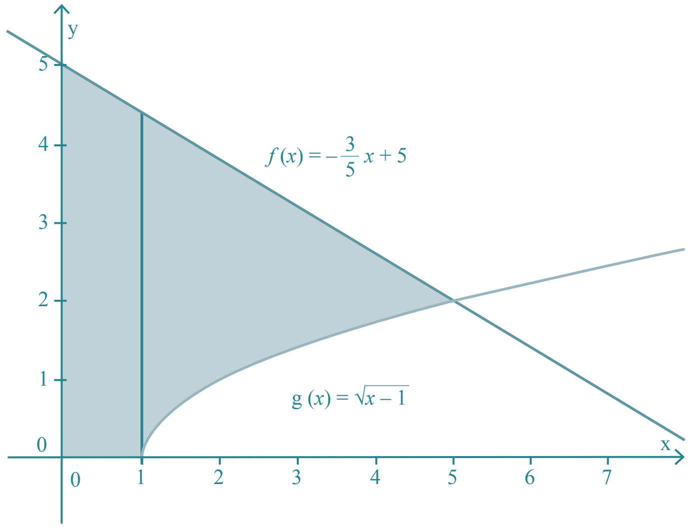
$\mathrm{V} = \dfrac{324}{5}\pi$





15.

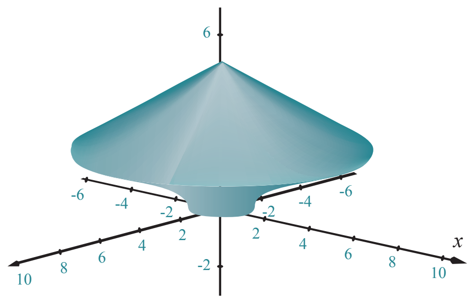
a) La región R se muestra en la gráfica y queda limitada superiormente por la recta $3x + 5y = 25$, inferiormente por el eje x y la parábola $y = \sqrt{x-1}$ y a la izquierda por el eje y.



La intersección de las curvas ocurre en $(5,2)$.

b) $= \dfrac{73}{6}$

c) El volumen de revolución alrededor del eje *Y* es aproximadamente 121.6844 unidades cúbicas.



d) El área superficial del sólido mostrado en la figura anterior es de aproximadamente 174.015 unidades de superficie.

e) Para el centroide de la región es: $m = \dfrac{76}{3}$.

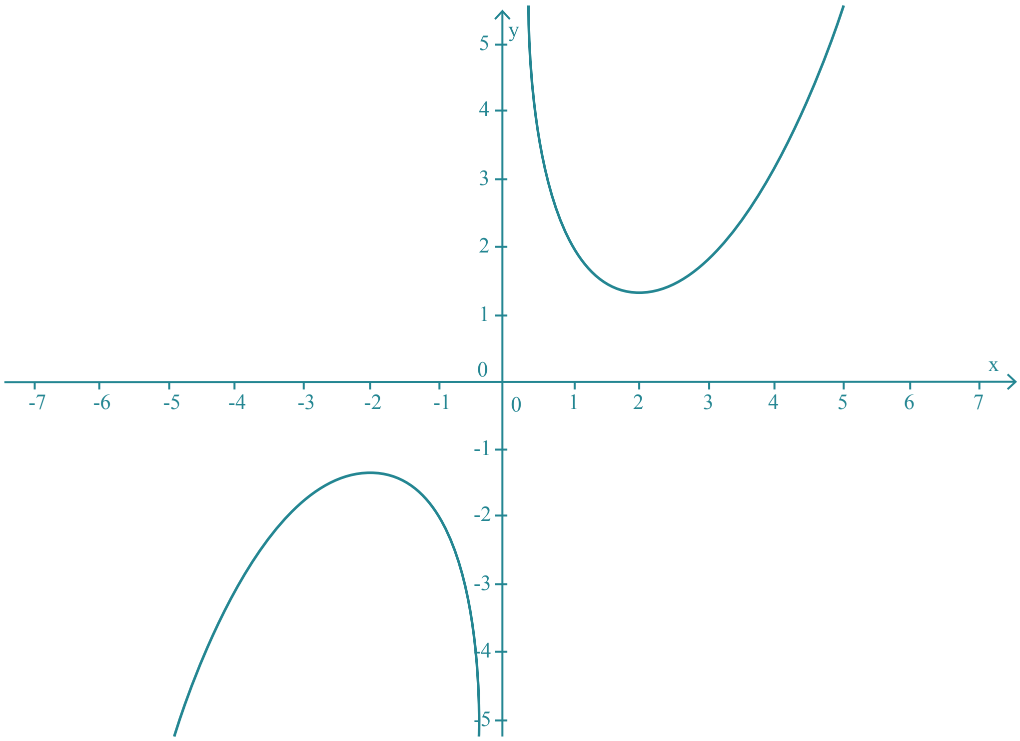
El centroide es:

$$\therefore C = \left(\frac{581}{365}, \frac{171}{73}\right)$$

16. Una curva tiene por ecuación $24xy - x^4 - 48 = 0$

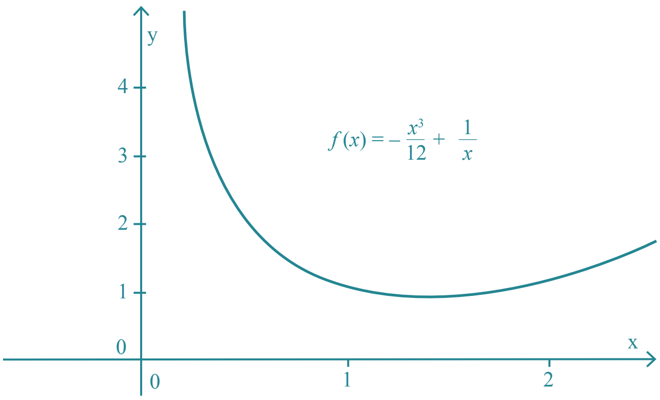
a) La longitud del arco en el intervalo son 4.125 unidades de longitud.

b) Como la integral diverge, no es posible calcular la longitud de la curva en el intervalo.

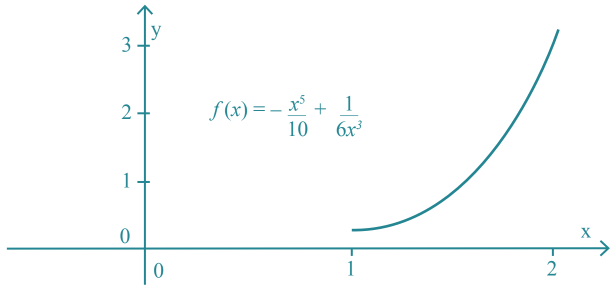


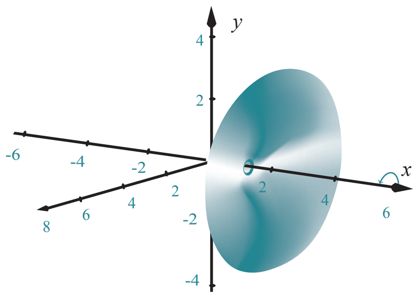
17. Calcula la longitud de la curva dada por la función $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ en el intervalo para el cual $\frac{1}{10} \leq x \leq 2 \cdot$

La longitud de la curva dada es aproximada a 10. 1666



18. Una superficie se genera cuando la curva $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$ se hace girar alrededor del eje x en el intervalo $1 \le x \le 2$.





$S \approx 33.4810$

19. Determina si converge la integral impropia $\int_0^\infty \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}} dx$

La integral diverge ya que es resulta: ∞

20. Determina $\int_0^\infty \frac{10x}{\left(x^2+1\right)^5} dx = \frac{5}{4}$

$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2xdx$

$$\begin{cases} \text{si } x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ \text{si } x = b \Rightarrow u = b^2 + 1 \end{cases}$$

La integral converge.

21. Determina $\int_{-2}^{2} \frac{16}{x^4} dx = \int_{-2}^{0} \frac{16}{x^4} dx + \int_{0}^{2} \frac{16}{x^4} dx \;\; \infty$

Esta integral diverge en $\int_{-2}^{2} \frac{16}{x^4} dx$.

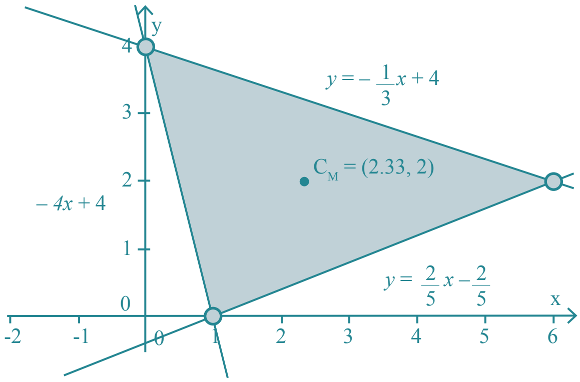
22. Determina la integral $\int_1^\infty x e^{-x^2}$

La integral es impropia de primera especie, luego: $= \frac{1}{e}$

Por lo tanto, la integral converge.

23. Encuentra el centroide de la región limitada por las gráficas de $4x + y = 4$, $x + 3y = 12$ y $2x - 5y = 2$

La región es un triángulo como en la figura



El área de la región es=11

El momento en $y = \frac{77}{3}$

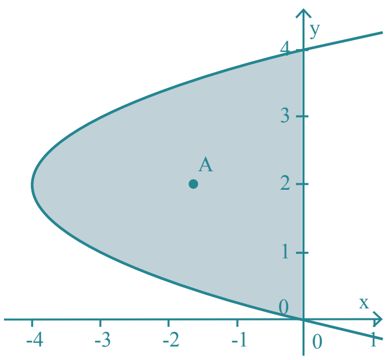
El momento en $x = 22$

El centro de masa es:

$$C = \left(\frac{\frac{77}{3}}{11}, \frac{22}{11}\right) = \left(\frac{7}{3}, 2\right)$$

24. Encuentra el centro de masa de la región limitada por la curva $x = y^2 - 4y$ y el eje y.

$A = \frac{32}{3}$



$$M_y = -\frac{256}{15}$$

$$M_x = \frac{64}{3}$$

Por lo tanto, el centro de masa es $C_M = \left(-\frac{8}{5}, 2\right)$

25. Un hombre carga un costal con 100 libras de harina por una escalera de 20 pies de largo a razón de 4 pies por segundo. El costal tiene un agujero por el que se fuga continuamente harina a razón de 2 libras por segundo. ¿Cuánto trabajo realiza el hombre en llevar el costal por la escalera?

Al hombre le tomará $\frac{20 \text{ pies}}{4 \ \frac{\text{pies}}{\text{seg}}} = 5 \text{ seg}$ en hacer el recorrido por la escalera, por lo tanto se realiza un trabajo de $1900 \ \text{libras} \cdot \text{pie}$

26. Un peso de 150 libras se fija en un extremo de una cadena cuyo peso es de 2 libras por pie. Inicialmente el peso se suspende con 10 pies de cadena sobre el borde de un edificio de 100 pies de altura. Considerando sólo la fuerza de la gravedad, calcular el trabajo realizado cuando el peso se baja hasta una posición de 10 pies sobre el suelo.

Tenemos una fuerza fija equivalente a 150 libras más otra fuerza variable correspondiente al peso de la cadena (2libras/pie), por lo tanto:
El trabajo realizado es de 20 000 libras por pie.