Capítulo 3

Desarrollo de la competencia. Corrección

Desarrollo de la competencia del capítulo 3

ÁREA NETA CON SIGNO

En los problemas del 1 al 15 dibuja la región delimitada por la gráfica de la función dada en el intervalo indicado y calcula el área neta con signo.

1. $f(x) = 1 - 2x$; $[-1, 2]$

2. $f(x) = \sqrt{x} - 2$; $[0, 4]$

3. $f(x) = 1 - x^2$; $[-1, 2]$

4. $f(x) = x\sqrt{1 - x}$; $[-1, 1]$

5. $f(x) = \cos x$; $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$

6. $f(x) = \ln x$; $\left[\frac{1}{2}, \mathrm{e}\right]$

7. $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; $[1, \pi^2]$

8. $f(x) = -xe^x$; $[-1, 1]$

9. $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$; $[1, 3]$

10. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$; $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

11. $f(x) = \sec x$; $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

12. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $[2, 4]$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; $[-1, 0]$

14. $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{4}\right)$; $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

15. $f(x) = \sinh(x)$; $[-1, 2]$

ÁREA TOTAL

En los problemas 16 al 20 calcula el área total de la región limitada por la gráfica de la función dada en el intervalo indicado.

16. $f(x) = 2 - 2x^2$; $[-1, 2]$

17. $f(x) = -x^3 + 4x$; $[-2, 2]$

18. $f(x) = 2x\sin(x)$; $[0, 2\pi]$

19. $f(x) = |x^2 - 4x|$; $[2, 6]$

20. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$; $[-3, 3]$

ÁREA ENTRE CURVAS

En los problemas del 21 al 25 utilice la integral definida para encontrar el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Realice un bosquejo de la región y asegúrese de encontrar las intersecciones.

21. $y = 6x - x^2$ y $y = 2x$

22. $y = 2 + \sqrt{x-2}$, $y = \dfrac{8-x}{3}$ y $x = 8$

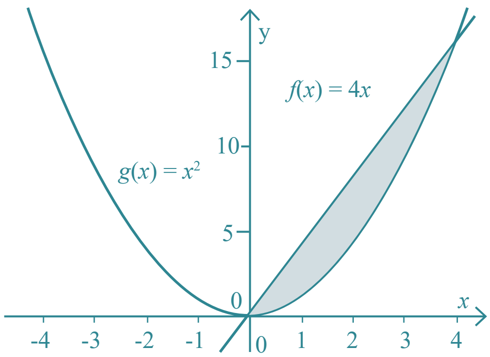
23. $y = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $y = -x^2 + 2x$

24. $y = x^3 - 12x$ y $y = x^2$

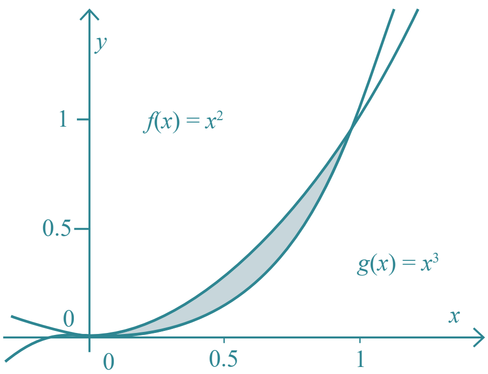
25. $x = y^2$ y $x = 2y^2 - 4$

En los problemas 26 al 30 construye la integral definida que calcula el área de la región iluminada en la gráfica dada. Evalúa la integral y comprueba tu respuesta con el software de apoyo.

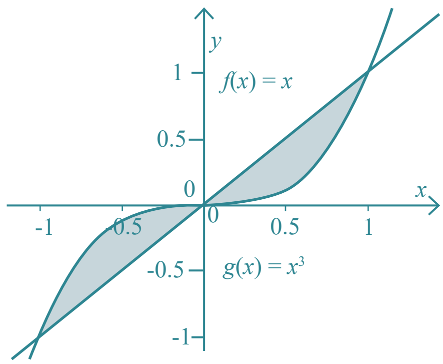
26.



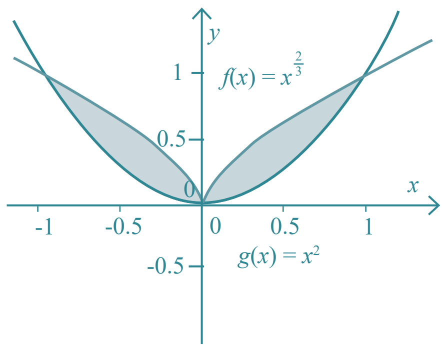
27.



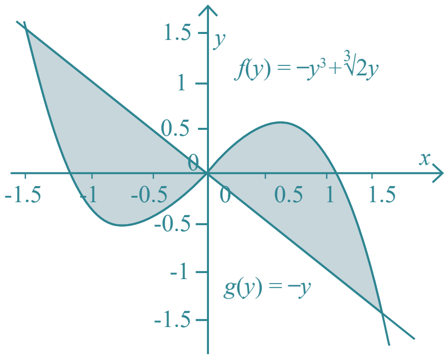
28.



29.



30.



LONGITUD DE ARCO

En los problemas de 31 al 44 calcular la longitud de arco de la curva cuya ecuación es dada en el intervalo indicado. Comprueba tu resultado con el software de apoyo.

31. $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$; $[0,5]$

32. $f(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$; $[1,2]$

33. $f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$; $[0,4]$

34. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$; $\left[\frac{1}{8}, 1\right]$

35. $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$; $\left[0, 2\sqrt{3}\right]$

36. $f(x) = \ln(\sec x)$; $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

37. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; $[-2,2]$

38. $e^y = 1 - \cos x$; $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

39. $f(x) = \ln(1-x^2)$; $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

40. $g(y) = \frac{y^2+4}{4}$; $-1 \le y \le 1$

41. $g(\mathrm{y}) = \ln(\sin y)$; $\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{2}$

42. Un cable que cuelga entre dos postes de igual altura distantes 30 metros adopta la forma de una curva llamada **catenaria**. Supongamos que en este caso la forma viene dada $y = 15\frac{e^{\frac{x}{15}} + e^{-\frac{x}{15}}}{2}$

a) ¿Cuál es la altura de los postes si los cables están sujetos en su parte más alta?

b) ¿Cuál es la longitud del cable?

43. Un proyectil lanzado desde el nivel del suelo sigue la trayectoria $y = \frac{1}{15}x(60-x)$ metros. Realiza un esbozo de su trayectoria.

a) ¿Cuánto ha recorrido horizontalmente hasta su impacto con el suelo?

b) Calcula el recorrido del proyectil.

c) Si el proyectil ha estado 4 segundos en el aire ¿cuál ha sido su velocidad media?

44. Encuentra la longitud de arco de la curva $y = \sqrt{25-x^2}$ sobre el intervalo $[0,5]$.

MÉTODO DE DISCOS

En los problemas 45 al 54 emplea el método de discos para calcular el volumen del sólido de revolución cuando la región limitada por las funciones dadas se hace rotar alrededor del eje indicado. Comprobar la respuesta usando el software de apoyo.

45. $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ entre $x = 0$ y $x = 2$ alrededor del eje y.

46. $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ entre $x = 0$ y $x = 2$ alrededor del eje x.

47. $f(x) = 10e^{0.05x}$ con $0 = x = 10$ alrededor del eje x.

48. $y = 1 + \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 4$ alrededor del eje x.

49. $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$ alrededor de la recta $x = 4$.

50. $y = \cos x$, $y = 0$ y $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ en torno al eje x.

51. $y = \cos x$, $y = 0$y $x = 0$ en torno al eje y.

52. $y = x^2$ y $y = 4$ en torno a y.

53. $y = x^2$, $x = 0$ y $y = 4$ en torno a la recta $y = 4$.

54. Un jarrón tiene secciones circulares de radio $y = 4 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ centímetros, con $0 \leq x \leq 2\pi$. Calcular su volumen y hacer un esbozo del jarrón.

MÉTODO DE ARANDELAS

En los ejercicios 55 al 70 representa la región R limitada por las ecuaciones dadas y emplea el método de arandelas para calcular el volumen del sólido generado al girar la región alrededor del eje indicado. Traza un rectángulo típico así como la arandela que se genera.

55. $y = 1$, $y = 2$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ alrededor del eje x.

56. $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 4, y = \frac{1}{8}$ alrededor del eje x.

57. $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 4, y = \frac{1}{8}$ alrededor del eje y.

58. $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$ alrededor del eje x.

59. $x = y^2 + 1$, $x = -y + 3$, $x = 1$, $x = 2$ alrededor del eje y.

60. $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$ alrededor del eje x.

61. $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$ alrededor de la recta $y = 5$.

62. $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$ alrededor de la recta $x = 4$.

63. $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = \sqrt{4 - x^2}$ alrededor del eje x.

64. $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^2$ alrededor del eje x.

65. $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^2$ con alrededor del eje y.

66. $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$ alrededor de la recta.

67. $x = y^3$, $x = 1$, $y = 0$, alrededor de la recta $x = 3$.

68. $y = 2x$, $y = x^2$ alrededor del eje y.

69. $y = 2x$, $y = x^2$ alrededor del eje x.

70. $y = 1 + \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 4$ alrededor de la recta $x = 4$.

MÉTODO DE CASQUETES

En los problemas 71 al 82 representa la región R limitada por las ecuaciones dadas y emplea el método de arandelas para calcular el volumen del solido generado al girar la región alrededor del eje indicado. Traza un rectángulo típico así como la arandela que se genera.

71. $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ alrededor del eje y.

72. $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = \dfrac{1}{8}$ alrededor del eje y.

73. $y = x^2 - 2x$, $y = 0$ alrededor del eje y

74. $y = x^3 + 2$, $x = 1$, $y = 2 - x$ alrededor del eje y.

75. $y = x^2 - 4x$, $y = -x^2 + 4x$ alrededor de la recta $x = -2$.

76. $y = \dfrac{x^2}{4}$, $y = 2$, $x = 2$ alrededor del eje x.

77. $y = \ln x$, $x = 0$, $y = 0$ alrededor del eje y.

78. $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 2$ alrededor del eje x.

79. $y = x^3$, $y = 4x$ en el primer cuadrante, alrededor del eje x.

80. $y = x^3$, $y = 4x$ alrededor de la recta $x=4$.

81. Una ojiva de una bala tiene la forma sólida generada por la región limitada por $y = 2 - x^2$, el eje x, el eje y y la recta $x = 1$ cuando gira en torno al eje y. Se le hace un orificio centrado en el vértice de 1/8 de centímetro de radio y 1/4 de centímetro de profundidad. ¿Qué volumen posee la ojiva?

82. Un joyero tiene una bola de oro de 1 cm de radio y taladra un agujero en forma de cilindro al centro de la bola de 0.1 cm de radio. Construir la integral que determina el volumen y usar un CAS para calcular el volumen de la pieza perforada.

ÁREA SUPERFICIAL

En los problemas 83 al 90 calcular el área de la superficie de revolución que se engendra cuando la parte de la gráfica de la ecuación dada en el intervalo indicado gira alrededor del eje mencionado. Comprueba tu respuesta usando un CAS.

83. $y = \dfrac{x^2}{4}, [0, 2]$, alrededor del eje x.

84. $y = \sqrt{x+1}$, $[0, 3]$, alrededor del eje x.

85. $y = e^{y}$, x $= -1, x = 1$ alrededor del eje x.

86. $y = \cos(x), [0, \pi]$ alrededor del eje x.

87. $y = \sqrt{25 - x^2}$, $[0, 4]$ alrededor del eje x.

88. $y = 2\sqrt[3]{x}$, $[1, 8]$ alrededor del eje y.

89. $y = x^3$, $y = 4x$ alrededor del eje y.

90. $x = \sqrt{y}$, $[1, 4]$ alrededor del eje y.

INTEGRALES IMPROPIAS

En los problemas 88 al 112 evalúa la integral impropia dada o muestra que es divergente. Comprueba la solución usando un CAS.

91. $\int_{-\infty}^{0} x 2^{-x^2}\, dx$

92. $\int_{-\infty}^{\infty} x \cosh x dx$

93. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$

94. $\int_{1}^{\infty} \dfrac{2}{x^3}\, dx$

95. $\int_{0}^{\infty} 2xe^{-x^2}\, dx$

96. $\int_{0}^{\infty} \dfrac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2} dx$

97. $\int_{0}^{\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} dx$

98. $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \sin x dx$

99. $\int_{2}^{3} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\, dx$

100. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$

101. $\int_{-\infty}^{2} xe^{x} dx$

102. $\int_{1}^{\infty} \dfrac{2}{x^8} dx$

103. $\int_{10}^{\infty} \dfrac{1}{x^{10}} dx$

104. $\int_{0}^{1^+} \dfrac{1}{x^2+2x}\, dx$

105. $\int_{0}^{1} \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}\, dx$

106. $\int_{0}^{1} \sqrt{\dfrac{1-x}{x}} dx$

107. $\int_{3}^{6} \dfrac{2}{x\sqrt{x^2-9}}\, dx$

108. $\int_{0}^{3} \dfrac{1}{x^2-9}\, dx$

109. $\int_{0}^{3} \dfrac{1}{9-x^2}\, dx$

110. $\int_{1}^{2} \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} dx$

111. $\int_{0}^{2} \dfrac{1}{\sqrt[3]{2-x}} dx$

112. $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

CENTROIDES

En los problemas del 113 al 122 calcular el centro de masas de una lámina delgada cuya región está limitada por las ecuaciones dadas.

113. $y = 2x + 1,\ y = 0,\ x = 0$ y $x = 2$

114. $y = x^3,\ y = 0$ y $x = 4$

115. $y = 6\sin x,\ y = -2\sin x,\ 0 \le x \le \pi$

116. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ 0 \le x \le 9$

117. $y = \sqrt[3]{x},\ 0 \le x \le 8$

118. $y = -x^2 + 4x,\ y = x,\ 0 \le x \le 3$

119. $x = y^2 - 4,\ x = -y + 2$

120. $x = y^2 - 4,\ x = -y + 2$

121. $y = \sqrt{1-(x-1)^2} + 1,\ y = |x-1|$

122. $y = -x^2 + \pi x,\ y = -\sin x,\ 0 \le x \le \pi$

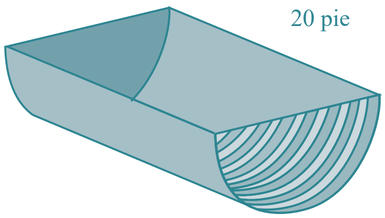
TRABAJO

123. Un tanque tiene la forma de un cono circular recto de 15 pies de altura y una base de 20 pies de diámetro. El tanque se encuentra como cono invertido con su vértice a nivel del suelo y está lleno hasta 2/3 partes de su capacidad con agua. Calcular el trabajo realizado para vaciar el tanque si el agua se bombea desde arriba del tanque.

124 Un tanque cuya forma es una semiesfera de radio 30 pies está completamente lleno de agua. Encuentre el trabajo requerido para vaciar el tanque si el agua se extrae por la parte superior.

125. Un cable de acero que pesa 10 lb/pie es utilizado para levantar un piano de 1000 lb de peso. Calcular el trabajo realizado para elevar el piano hasta una azotea de 50 pies de altura.

126. Un depósito en forma de medio cilindro circular recto esta sobre el suelo por su lado curvo, está lleno de una solución de salmuera cuya densidad es de $78\ \text{lb/pie}^3$. El tanque tiene 20 pies de largo y 12 pies de diámetro, encuentre el trabajo realizado para bombear toda la salmuera hasta la parte superior del depósito.



127. Un tanque en forma de cubo inicialmente está lleno con $50\ \text{pie}^3$ de agua, una grúa lo eleva desde el suelo. Si el cubo empieza a drenar agua por la parte de abajo en el preciso instante en que empieza a levarse a razón de $1\ \text{pie}^3$ por cada 2 pies de elevación, calcular el trabajo realizado hasta el instante en que el depósito esta vacio.