Capítulo 3

Correcciones cálculo Integral

Correcciones al Capítulo 3 de cálculo Integral

Página 124

Dice:

3.1.1 Área bajo la gráfica de una función

La definición de área presentada en el capítulo 1 propuso que si $f(x) \geq 0$ para toda x en un intervalo cerrado a, b, el área total de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales x a y x b son calculadas por $\int_a^b f(x)\,dx$

Debe decir:

3.1.1 Área bajo la gráfica de una función

La definición de área presentada en el capítulo 1 propuso que si $f(x) \geq 0$ para toda x en un intervalo cerrado a, b, el área total de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales x a y x b es calculada por $\int_a^b f(x)\,dx$

Dice:

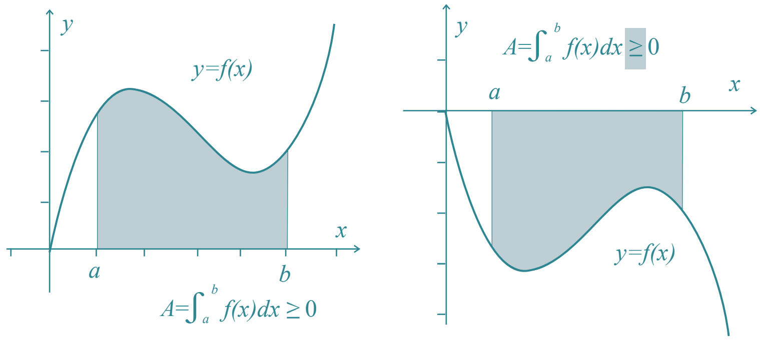


Figura 3.1 Área total de una región.

Debe decir:

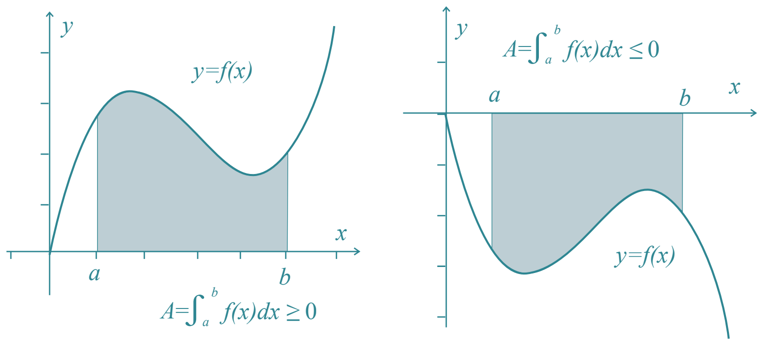


Figura 3.1 Área total de una región.

Página 125

Dice:

III) Si la función es a veces positiva y a veces negativa en el intervalo, se calculan los puntos de intersección de la función con el eje x dentro del intervalo, y se calculan las integrales sucesivas utilizando los apartados anteriores, lo cual equivale a evaluar $\int_a^b \left|f(x)\,dx\right| dx$

Debe decir:

III) Si la función es a veces positiva y a veces negativa en el intervalo, se encuentran los puntos de intersección de la función con el eje x dentro del intervalo, y se calculan las integrales sucesivas utilizando los apartados anteriores, lo cual equivale a evaluar $\int_a^b \left|f(x)\,dx\right| dx$

Página 128

Dice:

$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \left(-\operatorname{sen} x\right) dx\right|$$

Debe decir:

$$A = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left|-\sin x\right| dx$$

Página 129

Dice:

Solución

La gráfica de la función se muestra en la figura 3.6. Consta de una parábola en el intervalo $[-2,2]$ y una semicircunferencia de radio r 2 en el intervalo [2, 6]. La parábola tiene debajo de su curva el intervalo un área de signo positivo, mientras la semicircunferencia tiene un área de signo negativo.

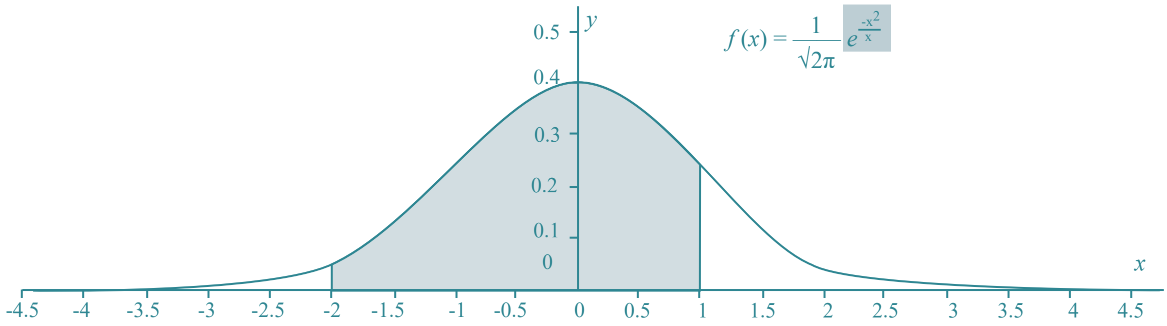
Debe decir:

Solución

La gráfica de la función se muestra en la figura 3.6. Consta de una parábola en el intervalo $[-2,2]$ y una semicircunferencia de radio r 2 en el intervalo [2, 6]. La parábola tiene debajo de su curva un área de signo positivo, mientras la semicircunferencia tiene un área de signo negativo.

Página 130

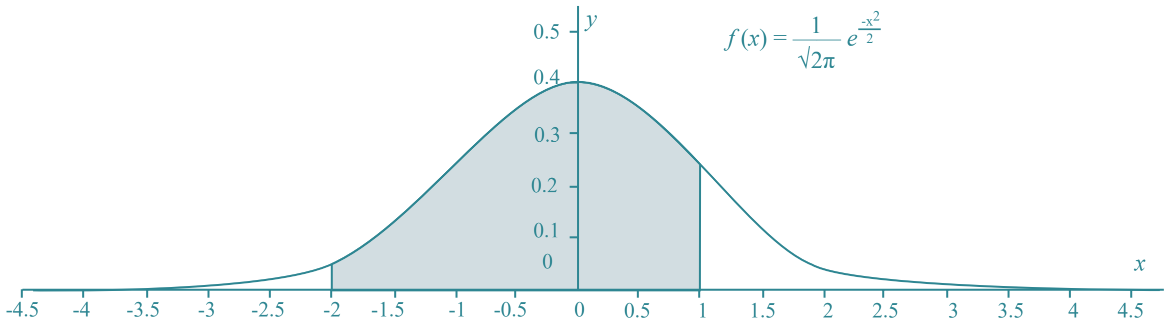
Dice:



$p (-2 \leq x \leq 1) = .8186$

Figura 3.7 Curva normal estándar.

Debe decir:



$p (-2 \leq x \leq 1) = 0.8186$

Figura 3.7 Curva normal estándar.

Página 136

Dice:

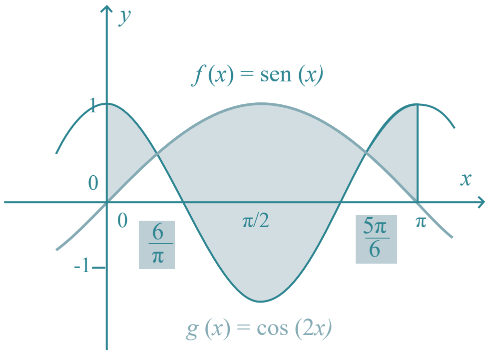


Figura 3.14 Gráfica de curvas que se intersecan en dos puntos.

Debe decir:

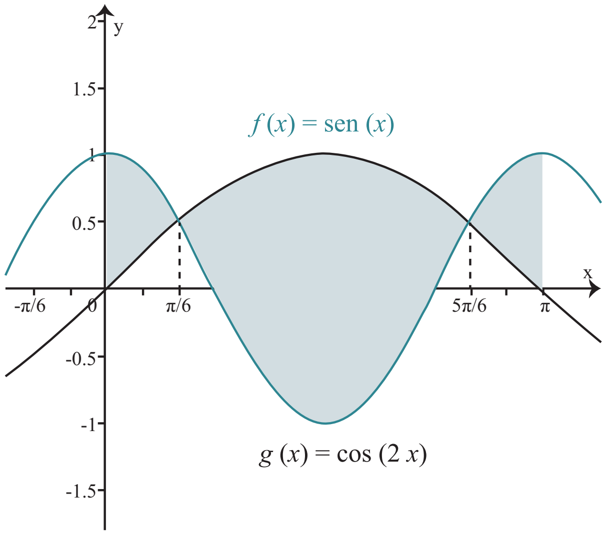


Figura 3.14 Gráfica de curvas que se intersecan en dos puntos.

Página 140

Dice:

Vamos a mostrar esto con el programa GeoGebra en el siguiente ejemplo.

Debe decir:

Usando el software de apoyo se muestra la integral como un proceso de acumulación.

Página 141

Dice:

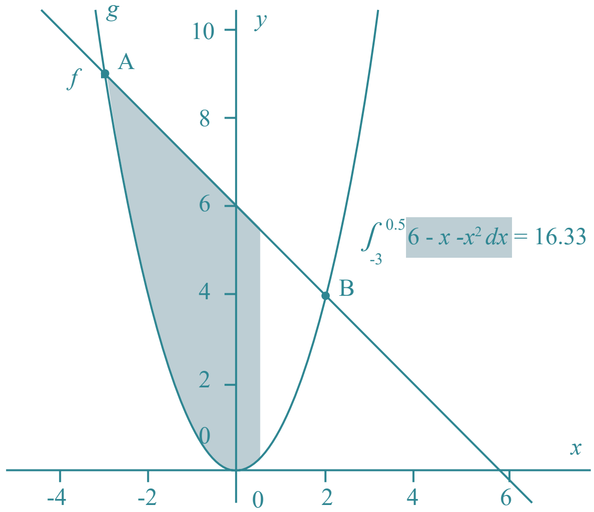


Figura 3.17 La integral definida como un proceso de acumulación.

Debe decir:

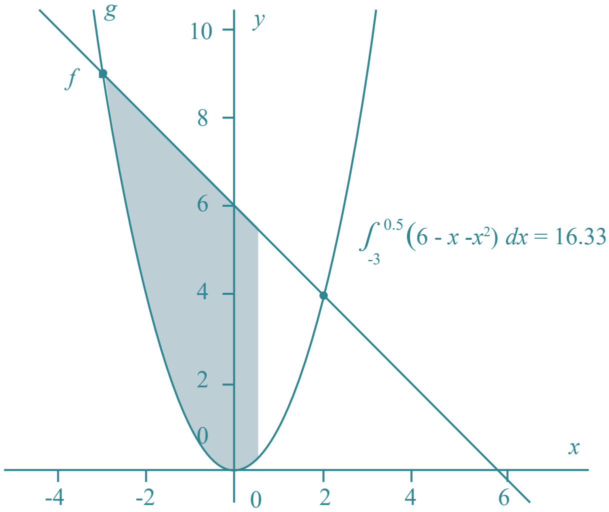


Figura 3.17 La integral definida como un proceso de acumulación.

Página 144

Dice:

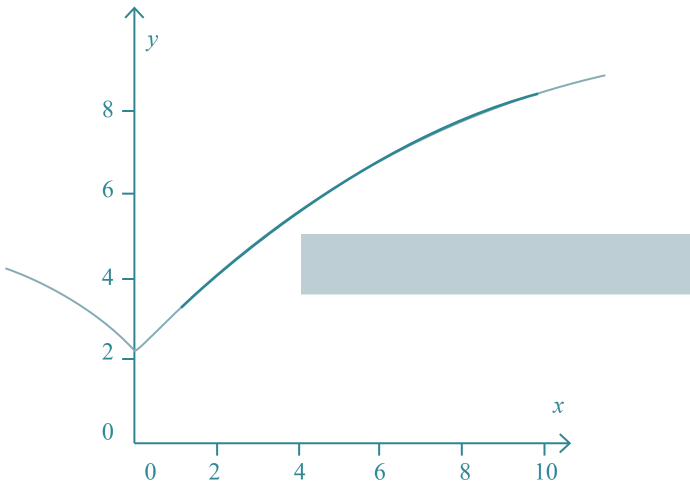


Figura 3.20

Debe decir:

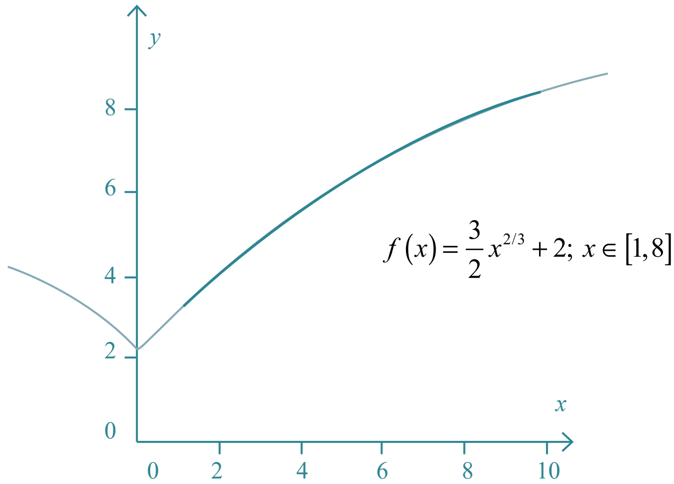


Figura 3.20

Dice:

Sustituyendo en la definición de longitud de arco

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_1^8\sqrt{1+\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^8\sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}}\,dx=\int_1^8\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx$$

$$=\int_1^8\frac{\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+1}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

Debe decir:

Sustituyendo en la definición de longitud de arco

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_1^8\sqrt{1+\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^8\sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}}\,dx=\int_1^8\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx$$

$$=\int_1^8\frac{\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+1}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

Página 146 y 147

Dice:

Ejemplo 3.15 Longitud de arco usando el software de apoyo

Debe decir:

El texto debe de ir como se muestra:

La longitud resulta ser s 8.7250 unidades lineales.

Longitud de arco usando el software de apoyo

Página 152

Dice:

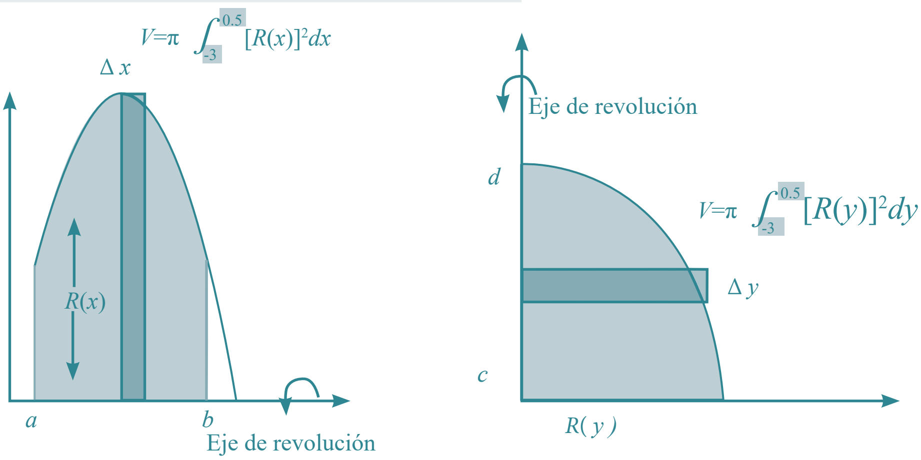


Figura 3.30 Elemento de área representativo perpendicular al eje de giro.

Debe decir:

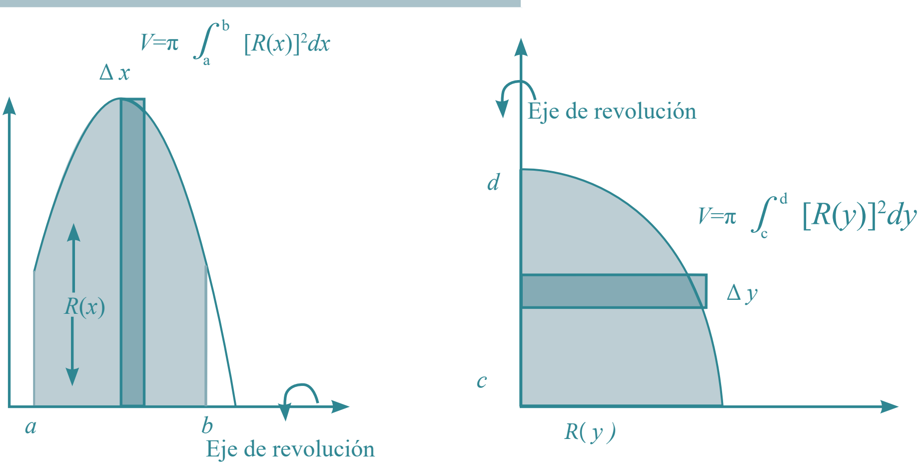


Figura 3.30 Elemento de área representativo perpendicular al eje de giro.

Página 153

Dice:

Ejemplo 3.18 Eje de revolución distinto de los ejes coordenados

Calcula el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las gráficas de $f(x) = 8 - x^2$ y $g(x) = 2$ en torno a la recta $y \quad 4$. Ver figura 3.32.

Debe decir:

Ejemplo 3.18 Eje de revolución distinto de los ejes coordenados

Calcula el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las gráficas de $f(x) = 8 - x^2$ y $g(x) = 4$ en torno a la recta $y \quad 4$. Ver figura 3.32.

Página 154

Dice:

Finalmente, integrando entre -2 y 2 obtenemos el volumen:

$$V = \pi\int_a^b [R(x)]^2 dx = \pi\int_{-1}^{1}\left[4 - x^2\right]^2 dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}(16 - 8x^2 + x^4)dx = \pi\left[4x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{512}{15}\pi$$

Debe decir:

Finalmente, integrando entre -2 y 2 obtenemos el volumen:

$$V = \pi\int_a^b [R(x)]^2 dx = \pi\int_{-1}^{1}\left[4 - x^2\right]^2 dx$$

$$= \pi\int_{-2}^{2}(16 - 8x^2 + x^4)\,dx = \pi\left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{512}{15}\pi$$

Página 157

Dice:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \left\{ \left[f(x_i^*) \right]^2 - \left[g(x_i^*) \right]^2 \right\} \Delta x_i w$$

Debe decir:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \left\{ \left[f(x_i^*) \right]^2 - \left[g(x_i^*) \right]^2 \right\} \Delta x_i$$

Página 160

Dice:

$$V = \int_0^1 \pi \left\{ [1]^2 - \left[\sqrt{y} \right]^2 \right\} dy$$

$$= \pi \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(0 - \frac{0}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Debe decir:

$$V = \pi \int_0^1 \left[(1)^1 - \left(\sqrt{y} \right)^2 \right] dy$$

$$= \pi \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(0 - \frac{0}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Dice:

Calcula el volumen del sólido que se genera cuando la región comprendida entre las gráficas de $x = \sqrt{y+2}$, x 0, y 0, x 4 y gira alrededor del eje y.

Solución

La figura 3.38 muestra la región en cuestión y el sólido generado.

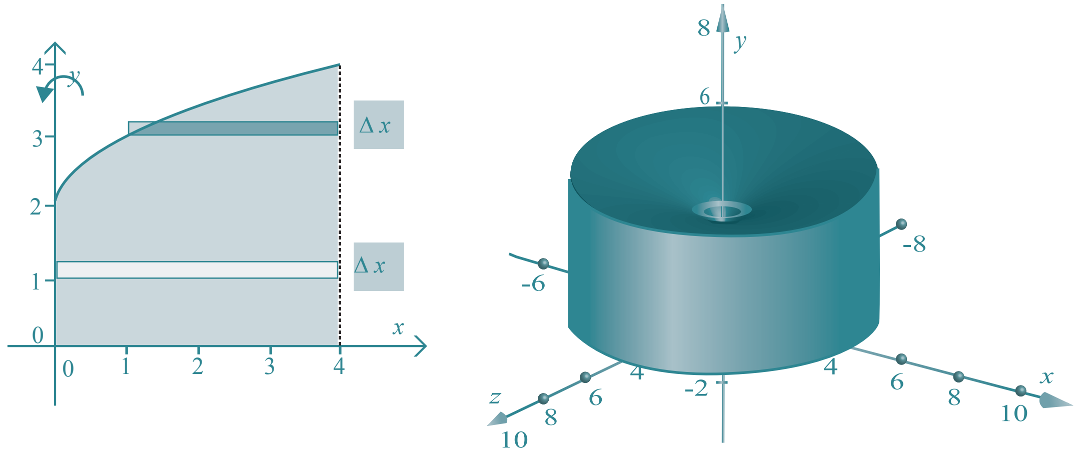


Figura 3.38 Región con límite.

Debe decir:

Calcula el volumen del sólido que se genera cuando la región comprendida entre las gráficas de $y = \sqrt{x}+2$, x 0, y 0, x 4 y gira alrededor del eje y.

Solución

La figura 3.38 muestra la región en cuestión y el sólido generado.

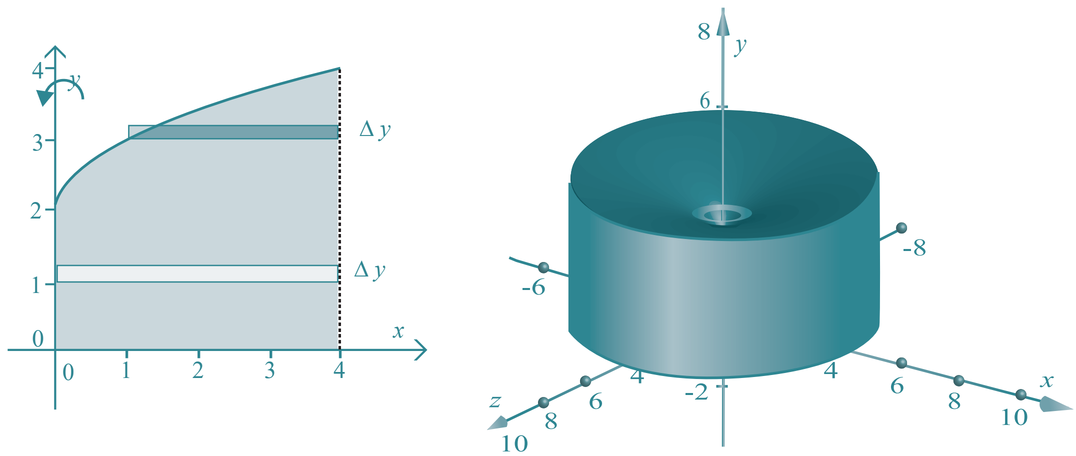


Figura 3.38 Región con límite.

Página 161

Dice:

En este ejemplo, la expresión que determina el volumen no puede construirse en una sola integral dado que la región R que gira alrededor del eje y tiene en $0 \le y \le 2$ su frontera pegada al eje, en tanto, en $2 < y \le 4$, la gráfica se separa del eje y, por lo que deberán combinarse el método de discos con el de arandela de la manera siguiente:

$$V = \underbrace{\pi \int_c^e \left[g(y_i^*)\right]^2 dy}_{\text{Método de discos}} + \underbrace{\pi \int_e^d \left\{\left[g(y_i^*)\right]^2 - \left[h(y_i^*)\right]^2\right\} dy}_{\text{Método de arandelas}}$$

$$= \pi \int_0^2 \left[4\right]^2 dy + \pi \int_2^4 \left\{\left[4\right]^2 - \left[\sqrt{y} + 2\right]^2\right\} dy$$

$$= \pi \int_0^2 16 dy + \pi \int_2^4 \left[16 - \left(y - 4\sqrt{y} + 4\right)\right] dy$$

$$= \pi \left[16y\right]_0^2 + \pi \left[12y - \frac{y^2}{2} - \frac{8}{3} y^{\frac{3}{2}}\right]_2^4$$

$$= \pi(32) + \pi\left[48 - 8 - \frac{64}{3} - 24 + 2 + \frac{16}{3}\sqrt{2}\right]$$

$$= \left(\frac{86}{3} + \frac{16}{3}\sqrt{2}\right)\pi$$

$$\approx 113.7544$$

El volumen es de 113.754 unidades cúbicas.

Debe decir:

En este ejemplo, la expresión que determina el volumen no puede construirse en una sola integral dado que la región R que gira alrededor del eje y tiene en $0 \le y \le 2$ su frontera pegada al eje, en tanto, en $2 < y \le 4$, la gráfica se separa del eje y, por lo que deberán combinarse el método de discos con el de arandela de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
V &= \underbrace{\pi\int_c^e \left[g\left(y_i^*\right)\right]^2 dy}_{\text{Método de discos}} + \underbrace{\pi\int_e^d \left\{\left[g\left(y_i^*\right)\right]^2 - \left[h\left(y_i^*\right)\right]^2\right\} dy}_{\text{Método de arandelas}} \\
&= \pi\int_0^2 [4]^2 dy + \pi\int_2^4 \left\{[4]^2 - \left[(y-2)^2\right]^2\right\} dy \\
&= \pi\int_0^2 16dy + \pi\int_2^4 \left[16 - \left(y^2 - 4y + 4\right)^2\right] dy \\
&= \pi\int_0^2 16dy + \pi\int_2^4 \left[16 - \left(y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 16\right)\right] dy \\
&= \pi\int_0^2 16dy + \pi\int_2^4 \left(-y^4 + 8y^3 - 24y^2 + 32y\right) dy \\
&= \pi\left[16y\right]_0^2 + \pi\left[-\frac{y^5}{5} + 2y^4 - 8y^3 + 16y^2\right]_2^4 \\
&= \pi(32) + \pi\left[\left(-\frac{(4)^5}{5} + 2(4)^4 - 8(4)^3 + 16(4)^2\right) - \left(-\frac{(2)^5}{5} + 2(2)^4 - 8(2)^3 + 16(2)^2\right)\right] \\
&= 32\pi + \pi\left[\frac{256}{5} - \frac{128}{5}\right] \\
&= \frac{288}{5}\pi \\
&\approx 180.96
\end{aligned}$$

El volumen es de 180.96 unidades cúbicas.

Página 171

Dice:

$$S = 2\pi \int_2^4 \frac{y^3}{8} \sqrt{1+\left(\frac{3}{8}y^2\right)^2}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_2^4 y^3 \sqrt{1+\frac{9}{64}y^4}\, dy \qquad u = 1 + \frac{9}{64}y^4 \rightarrow du = \frac{36}{64}y^3 dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_{\frac{13}{4}}^{37} \frac{64}{36} \sqrt{u}\, dy \qquad \underbrace{u = 1+\frac{9}{64}(2)^4 = \boxed{\frac{13}{3}}}_{\text{límite inferior}} \text{ y } \underbrace{u = 1+\frac{9}{64}(4)^4 = 37}_{\text{límite superior}}$$

$$= \frac{4\pi}{9}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{13}{4}}^{37}$$

$$= \frac{8\pi}{27}\left[(37)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\approx 204.0436$$

Debe decir:

$$S = 2\pi \int_2^4 \frac{y^3}{8} \sqrt{1+\left(\frac{3}{8}y^2\right)^2}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_2^4 y^3 \sqrt{1+\frac{9}{64}y^4}\, dy \qquad u = 1 + \frac{9}{64}y^4 \rightarrow du = \frac{36}{64}y^3 dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_{\frac{13}{4}}^{37} \frac{64}{36} \sqrt{u}\, dy \qquad \underbrace{u = 1+\frac{9}{64}(2)^4 = \frac{13}{4}}_{\text{límite inferior}} \text{ y } \underbrace{u = 1+\frac{9}{64}(4)^4 = 37}_{\text{límite superior}}$$

$$= \frac{4\pi}{9}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{13}{4}}^{37}$$

$$= \frac{8\pi}{27}\left[(37)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\approx 204.0436$$

Página 172

Dice:

Ejemplo 3.31 Área superficial forma alternativa

Para el caso de la función del ejemplo 3.31, con $f(x)=2\sqrt[3]{x}$ y $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^3}}$ la integral también puede formularse como:

Debe decir:

Ejemplo 3.31 Área superficial forma alternativa

Para el caso de la función del ejemplo 3.31, con $f(x)=2\sqrt[3]{x}$ y $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ la integral también puede formularse como:

Página 178 - 179

Dice:

Definición 3.10 Integrales impropias de segunda especie

I) Si f es continua en el intervalo $\left[a,\mathrm{b}\right]$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

II) Si f es continua en el intervalo $\left[\mathrm{a},b\right]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$$

III) Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ excepto para algún $c\in(a,b)$ en que f tiene una discontinuidad infinita, entonces

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

En los casos I) y II) la integral impropia converge siempre que el límite exista, de otra forma diremos que la integral impropia diverge. En el caso III) la integral impropia de la izquierda diverge si alguna de las integrales impropias de la derecha diverge.

Debe decir:

Definición 3.10 Integrales impropias de segunda especie

I) Si f es continua en el intervalo $[a,b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

II) Si f es continua en el intervalo $(a,b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$$

III) Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ excepto para algún $c\in(a,b)$ en que f tiene una discontinuidad infinita, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

En los casos I) y II) la integral impropia converge siempre que el límite exista, de otra forma diremos que la integral impropia diverge. En el caso III) la integral impropia de la izquierda diverge si alguna de las integrales impropias de la derecha diverge.

Página 183

Dice:

Despejando el centro de masa del sistema se llega a

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{m}$$

Debe decir:

Despejando el centro de masa del sistema se llega a

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{m}$$

Página 183

Dice:

Ejemplo 3.50 Trabajo por una fuerza variable

Considera una partícula desplazándose sobre el eje x por acción de una fuerza variable $f(x) = x^2 - 4x + 4$ expresada en lbs. Si la partícula se mueve desde el punto $x = 1$ pie hasta $x = 4$ pies por acción de la fuerza, calcula el trabajo realizado.

Solución
Por la definición de trabajo tenemos que

$$\begin{aligned} W &= \int_1^3 \left(x^2 - 4x + 4\right) dx \\ &= \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\Big| \\ &= 9 - 18 + 12 - \frac{1}{3} + 2 - 4 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Debe decir:

Ejemplo 3.50 Trabajo por una fuerza variable

Considera una partícula desplazándose sobre el eje x por acción de una fuerza variable $f(x) = x^2 - 4x + 4$ expresada en lbs. Si la partícula se mueve desde el punto $x = 1$ pie hasta $x = 3$ pies por acción de la fuerza, calcula el trabajo realizado.

Solución
Por la definición de trabajo tenemos que

$$\begin{aligned} W &= \int_1^3 \left(x^2 - 4x + 4\right) dx \\ &= \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\Big|_1^3 \\ &= (9 - 18 + 12) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$