Respuestas al desarrollo de la competencia del capítulo 4

En los problemas del 1 al 10, encuentra los primeros 6 términos de la sucesión dada. Verifica tus respuestas con el comando Secuencia[<Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>] en la vista CAS de GeoGebra.

1. Con $a_n = \dfrac{4n}{2n+3}$

$$
\begin{array}{lccccccc}
n= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
f(n)= & \dfrac{4(1)}{2(1)+3}, & \dfrac{4(2)}{2(2)+3}, & \dfrac{4(3)}{2(3)+3}, & \dfrac{4(4)}{2(4)+3}, & \dfrac{4(5)}{2(5)+3}, & \dfrac{4(6)}{2(6)+3}, & \cdots \\
a_n = & \dfrac{4}{5}, & \dfrac{8}{7}, & \dfrac{12}{9}, & \dfrac{16}{11}, & \dfrac{20}{13}, & \dfrac{24}{15}, & \cdots
\end{array}
$$

2. Con $a_n = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$

$$
\begin{array}{lccccccc}
n= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
f(n)= & \left(-\dfrac{4}{3}\right)^1, & \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2, & \left(-\dfrac{4}{3}\right)^3, & \left(-\dfrac{4}{3}\right)^4, & \left(-\dfrac{4}{3}\right)^5, & \left(-\dfrac{4}{3}\right)^6, & \cdots \\
a_n = & -\dfrac{4}{3}, & \dfrac{16}{9}, & -\dfrac{64}{27}, & \dfrac{256}{81}, & -\dfrac{1024}{243}, & \dfrac{4096}{729}, & \cdots
\end{array}
$$

3. Con $b_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$$
\begin{array}{lccccccc}
n= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
f(n)= & \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right), & \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{2}\right), & \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right), & \operatorname{sen}\left(\dfrac{4\pi}{2}\right), & \operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{2}\right), & \operatorname{sen}\left(\dfrac{6\pi}{2}\right), & \cdots \\
b_n = & 1, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0, & \cdots
\end{array}
$$

4. Con $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$\begin{array}{llllllll}
n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
f(n) = & (-1)^1 \frac{1}{1}, & (-1)^2 \frac{1}{2}, & (-1)^3 \frac{1}{3}, & (-1)^4 \frac{1}{4}, & (-1)^5 \frac{1}{5}, & (-1)^6 \frac{1}{6}, & \cdots \\
b_n = & -1, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & -\frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \cdots
\end{array}$$

5. Con $c_n = \frac{n^2}{n!}$

$$\begin{array}{llllllll}
n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
f(n) = & \frac{1^2}{1!}, & \frac{2^2}{2!}, & \frac{3^2}{3!}, & \frac{4^2}{4!}, & \frac{5^2}{5!}, & \frac{6^2}{6!}, & \cdots \\
c_n = & 1, & 2, & \frac{3}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{5}{24}, & \frac{1}{20}, & \cdots
\end{array}$$

6. Con $c_n = \frac{(2n)!}{n^2}$

$$\begin{array}{llllllll}
n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
f(n) = & \frac{(2)!}{1^2}, & \frac{(4)!}{2^2}, & \frac{(6)!}{3^2}, & \frac{(8)!}{4^2}, & \frac{(10)!}{5^2}, & \frac{(12)!}{6^2}, & \cdots \\
c_n = & 2, & 6, & 80, & 2520, & 145152, & 13305600, & \cdots
\end{array}$$

7. Con $p_n = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

$$\begin{array}{llllllll}
n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
f(n) = & 1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1^2}, & 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}, & 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}, & 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}, & 1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}, & 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}, & \cdots \\
p_n = & 1, & \frac{3}{4}, & \frac{7}{9}, & \frac{13}{16}, & \frac{21}{25}, & \frac{31}{36}, & \cdots
\end{array}$$

8 Con $p_n = \sqrt{2n}$

$$\begin{array}{lccccccc} n= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ f(n)= & \sqrt{2(1)}, & \sqrt{2(2)}, & \sqrt{2(3)}, & \sqrt{2(4)}, & \sqrt{2(5)}, & \sqrt{2(6)}, & \cdots \\ p_n \;= & \sqrt{2}, & 2, & \sqrt{6}, & 2\sqrt{2}, & \sqrt{10}, & 2\sqrt{3}, & \cdots \end{array}$$

9. Con $q_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}$

$$\begin{array}{lccccccc} n= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ f(n)= & \frac{(-1)^1}{1}+\frac{1}{1}, & \frac{(-1)^2}{2}+\frac{1}{2}, & \frac{(-1)^3}{3}+\frac{1}{3}, & \frac{(-1)^4}{4}+\frac{1}{4}, & \frac{(-1)^5}{5}+\frac{1}{5}, & \frac{(-1)^6}{6}+\frac{1}{6}, & \cdots \\ q_n \;= & 0, & 1, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{3}, & \cdots \end{array}$$

10. Con $r_n = 1+\cos(n\pi)$

$$\begin{array}{lccccccc} n= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ f(n)= & 1+\cos(\pi), & 1+\cos(2\pi), & 1+\cos(3\pi), & 1+\cos(4\pi), & 1+\cos(5\pi), & 1+\cos(6\pi), & \cdots \\ b_n \;= & 0, & 2, & 0, & 2, & 0, & 2, & \cdots \end{array}$$

En los problemas del 11 al 20, encuentra el n-ésimo término de la sucesión dada.

11. $\{a_n\} = 4n-2$

12. $\{a_n\} = 6n+1$

13. $\{a_n\} = 0.5n+0.2$

14. $\{a_n\} = \left\{(-1)^n \frac{n-1}{n^2}\right\}$

15. $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2}{n!}\right\}$

16. $\{a_n\} = \left\{\frac{4}{(4n)^2 - 1}\right\}$

17. $\{a_n\} = \left\{\frac{n!}{(n+1)^2}\right\}$.

18. $\{a_n\} = \left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$.

19. $\{a_n\} = \left\{(-1)^n \frac{1}{2n}\right\}$

20. $\{a_n\} = \left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$

En los problemas del 21 al 35, determina si la sucesión dada es convergente o divergente. Si la sucesión converge entonces encuentra su límite.

21. $\{a_n\} = \left\{\frac{4}{n-1}\right\}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n-1} = \frac{4}{\infty} = 0$, la sucesión converge = 0

22. $\{a_n\} = \{10^n\}$

$\lim_{n\to\infty} 10^n = 10^\infty = \infty$, la sucesión es divergente = ∞

23. $\{a_n\} = \left\{\frac{(n-3)!}{n!}\right\}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-3)!}{n!} = 0$, converge = 0

24. $\{a_n\}=\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, la sucesión converge = 0

25. $\{a_n\}=\left\{\frac{\ln\sqrt[10]{n}}{n}\right\}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt[10]{n}}{n}=0$, converge = 0

26. $\{a_n\}=\left\{\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n}\right\}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n}=0$, la sucesión es convergente =0

27. $\{a_n\}=\left\{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2}{n+1}\right\}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2}{n+1}\right)=2$, la sucesión converge = 2

28. $\{a_n\}=\left\{\frac{4n^2+1}{3n^2-1}\right\}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2-1}=\frac{4}{3}$

29. $\{a_n\}=\left\{8^{\frac{1}{n}}\right\}$

$\lim\limits_{n\to\infty}8^{\frac{1}{n}}=1$, la sucesión converge.

30. $\{a_n\}=\left\{1-\frac{2^n-1}{2^n}\right\}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2^n-1}{2^n}\right)=0$, la sucesión converge = 0

31. $\{a_n\} = \left\{\left(2 - \frac{10}{n}\right)^n\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{10}{n}\right)^n = -10$. La sucesión es convergente.

32. $\{a_n\} = \left\{\frac{n^3 - 1}{n^2 + 1}\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3 - 1}{n^2 + 1} = \infty$. La sucesión diverge = ∞.

33. $\{a_n\} = \left\{\frac{\ln 2n}{\ln 4n}\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2n}{\ln 4n} = 1$. La sucesión converge = 1.

34. $\{a_n\} = \left\{\frac{10^n}{5^n + 5}\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{5^n + 5} = \infty$. La sucesión diverge = ∞

35. $\{a_n\} = \left\{\sqrt{4n-1} - \sqrt{4n}\right\}$

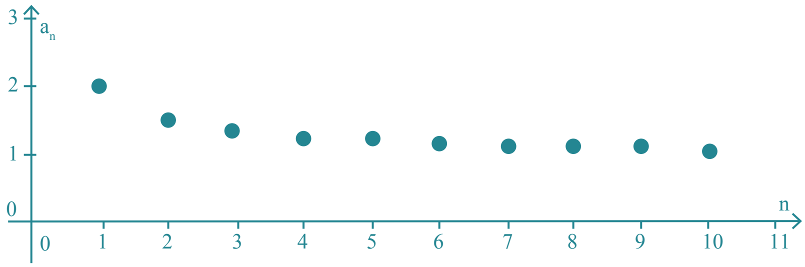
$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-1} - \sqrt{4n}\right) = 0$

La sucesión converge = 0

En los problemas 36 al 40, determina si la sucesión dada es monótona, si lo es, indica si es creciente, decreciente, no creciente o no decreciente. Utiliza el comando `Secuencia[ <Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final> ]` para trazar la gráfica de sus primeros 10 términos.

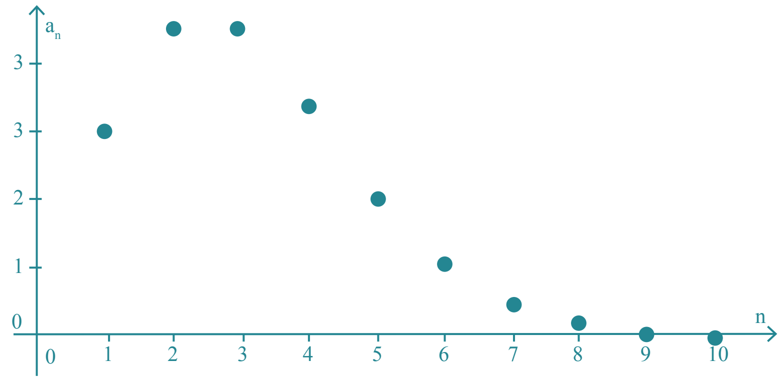
36. $\{a_n\} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}$

$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$ La sucesión monótona es decreciente.



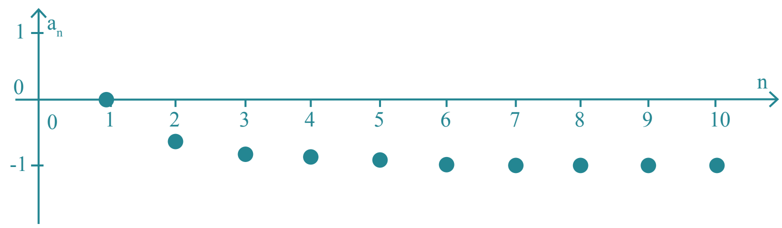
37. $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{3^n}{n!} \right\}$

La sucesión comienza con $a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = 4.5$, la sucesión no es monótona.



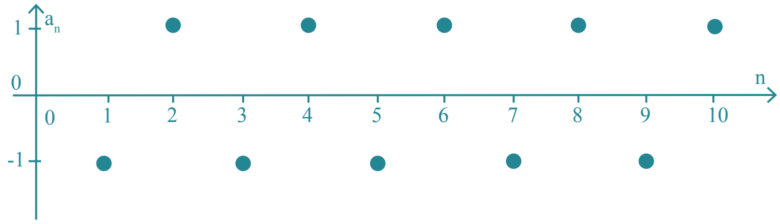
38. $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{1-n^2}{1+n^2} \right\}$

$a_{n+1} - a_n = < 0$, la sucesión es monótona decreciente.



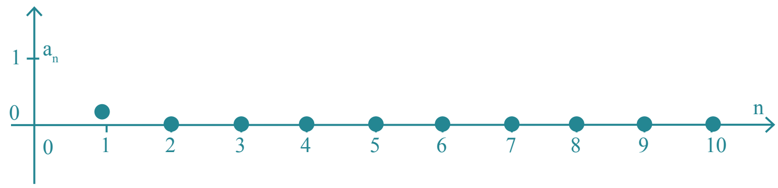
39. $\{a_n\} = \{\cos(n\pi)\}$

$\{a_n\} = \{-1,1,-1,1,-1,...\}$, la sucesión es no monótona. Es una sucesión alternante.



40. $\{a_n\} = \left\{\dfrac{5^{2n} n!}{(5n)!}\right\}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$ La sucesión es monótona decreciente.



En los problemas del 41 al 45, desarrolla la serie y usa el comando `Suma[ <Expresión>, <Variable>,<Valor inicial>, <Valor final>` para hallar la suma de dichos términos.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} \frac{2^n}{n^2}$

$\{2,2,1,\frac{1}{3},\frac{1}{12}\}$

137 / 30

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{8} \frac{n+1}{2n}$

$\{1,\frac{3}{4},\frac{4}{6},\frac{5}{8},\frac{6}{10},\frac{7}{12},\frac{8}{14},\frac{9}{16}\}$

3001 / 560

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{6} \frac{\operatorname{sen}(\frac{n}{2}\pi)}{n}$

$\{0,1,0,-1,0,1,0\}$

1

44. $\sum_{n=0}^{8}(-1)^n \frac{1-\cos n}{1+n}$

$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9}\right\}$

7129 / 2520

45. $\sum_{n=2}^{6}\frac{n!}{n^2-1}$

$\left\{\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{8}{5},\frac{30}{6},\frac{144}{7}\right\}$

12007 / 420

En los problemas 46 al 48, encuentra la suma de la serie telescópica dada.

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}$

47. $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2+3j+2} = \frac{1}{2}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9n+20} = \frac{4}{5}$

En los problemas 49 al 55 comprueba si la serie geométrica dada converge o diverge. En caso de ser convergente, calcula la suma.

49. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}10\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ = 20 La serie es convergente.

50. $\sum_{n=1}^{\infty}10^6(0.99)^n$ = 9 9000 000. La serie es convergente.

51. $\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ $r=\frac{3}{2}>1$. La serie es divergente.

52. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n$ $S = 1+\sqrt{2}$. La serie es convergente.

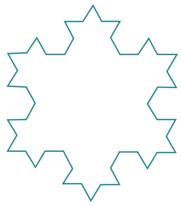
53. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ $S=\frac{5}{4}$. La serie es convergente.

54. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{9}{10}\right)^{n}$ $S=\frac{10}{19}$. La serie es convergente.

55. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$ $S=\frac{4}{5}$. La serie es convergente.

56. Se suelta una pelota desde lo alto de un edificio de 20 metros de altura y ésta rebota sobre una banqueta de concreto. Cada vez que la pelota, rebota su altura es de 2 / 5 de su altura anterior. ¿Qué distancia recorre la pelota antes de quedar en reposo?

La pelota recorre una distancia de $\frac{140}{3}$ metros antes de quedar en reposo.



57. Determina la longitud del perímetro de la figura cuando el proceso se repite indefinidamente.

El perímetro del triángulo cuando el número de etapas crece sin medida es: ∞

En los problemas 58 al 65, usa el criterio integral para determinar si la serie dada converge o diverge. Confirma el resultado con el comando `Integral[ <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo> ]` de GeoGebra.

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}=\infty$. La integral diverge.

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+3}=\infty$. La integral diverge.

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}$. La integral converge.

61. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}=\infty$. La integral diverge.

62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n}-e^{-n}}$ $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{e^{x}-e^{-x}}dx=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$ La integral converge.

63. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^{2}-1}$ $=\infty$. La integral diverge.

64. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^{2}}=\frac{1}{2}e^{-1}$ La integral converge.

65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{2}n}{n}$

La función dada es monótona creciente para $n>1$, por lo que es divergente.

En los problemas 66 al 70, determina si la serie dada es convergente o divergente y encuentra el radio de convergencia.

66. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^{n}=0$. La serie solo converge en $x=0$

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n+1}}{2^{n^{2}+1}}x^{n}=\infty$. La serie es convergente para todo valor de $x\in\mathbb{R}$, luego, el intervalo

de convergencia es: $(-\infty,\infty)$.

68. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{4}}{6^{n}}x^{n}$ $=6$

Así la serie es convergente si $|x|<6$ y divergente si $|x|>6$. Entonces el intervalo de convergencia es: $(-6,6)$.

69. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}$ $=1$

Así la serie es convergente si $|x|<1$ y divergente si $|x|>1$. Entonces el intervalo de convergencia es $(-1,1)$.

70. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}(2x)^{n}$

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{n}|}==\Rightarrow R=\frac{1}{2}$$

Así la serie es convergente si $|x| < \frac{1}{2}$ y divergente si $|x| > \frac{1}{2}$. Entonces el intervalo de convergencia es $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

En los ejercicios 71 al 80, encuentra el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada.

71. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{10}\right)^n$

La serie es una serie geométrica centrada en cero y converge solo si $\left|\frac{x}{10}\right| < 1$ entonces:

$-1 < \frac{x}{10} < 1$ lo cual implica que $-10 < x < 10$.

72. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}x^n$

La serie converge solo si $\frac{1}{3}|x| < 1 \Rightarrow -3 < x < 3$.

Cuando $x = -3$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}(-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^3$ diverge.

Cuando $x = 3$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}(3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}n^3$ diverge.

El intervalo de convergencia es $-3 < x < 3$.

73. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$

La serie converge solo si $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$.

Cuando $x = -1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n$ converge.

Cuando $x = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

El intervalo de convergencia es $-1 \le x < 1$.

74. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}x^n$

La serie converge solo si $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$.

Cuando $x=-1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}\left(-1\right)^n$ converge.

Cuando $x=1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ diverge.

El intervalo de convergencia es $-1\le x<1$.

75. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}x^n$

La serie converge solo en $x=0$, el radio de convergencia es $R=0$

76. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n}x^n$.

La serie converge solo en $x=0$, el radio de convergencia es $R=0$

77. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^{2n}}{n+10}(x-10)^n$.

La serie converge sólo si converge en $100\left|x-10\right|<1$, es decir, si $\frac{999}{100}<x<\frac{1001}{100}$.

Cuando $x=-10$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^{2n}}{n+10}(-20)^n$ diverge.

Cuando $x=10$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^{2n}}{n+10}(0)^n=0$ converge.

El intervalo de convergencia es $\frac{999}{100}<x\le\frac{1001}{100}$.

78. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}(x-3)^n$

La serie converge sólo si converge en $\frac{1}{3}\left|x-3\right|<1$, es decir, si $0<x<6$.

Cuando $x=-3$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}(-6)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(2)^n$ diverge.

Cuando $x=3$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}(0)^n=0$ converge.

El intervalo de convergencia es $0<x\le 6$.

79. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{(5n)!}$

El intervalo de convergencia es $-\infty < x < \infty$.

80. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n}(x-2)^n$

Entonces $R=0$, la serie solo converge en $x=2$.

En los ejercicios 81 al 90, encuentra el polinomio de Taylor de la función dada en el grado indicado. Comprueba tu resultado con el comando `PolinomioTaylor[ <Expresión>, <Valor de x>, <Número (orden)> ]` en la vista CAS de GeoGebra

81. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}; n=5$ en potencias de $(x-3)$

Derivando sucesivamente 5 veces y evaluando en $x=3$.

El polinomio de grado 5 es:

$$P_5(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}(x-3)+\frac{\frac{3}{}}{2!}(x-3)^2-\frac{\frac{15}{1024}}{31}(x-3)^3+\frac{\frac{105}{8192}}{4!}(x-3)^4-\frac{\frac{945}{65536}}{5!}(x-3)^5$$
$$\vdots$$

82. $f(x)=\sqrt[3]{x};\ n=4$ en potencias de $(x-1)$

Derivando sucesivamente 4 veces y evaluando en $x=1$

El polinomio de grado 4 es:

$$P_4(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{\frac{2}{9}}{2!}(x-1)^2+\frac{\frac{10}{27}}{3!}(x-1)^3-\frac{\frac{80}{81}}{4!}(x-1)^4$$

83. $f(x)=\sqrt[4]{x+16};\ n=4$ en potencias de $(x-9)$

Derivando sucesivamente 3 veces y evaluando en $x=9$

El polinomio de grado 4 es:

$$P_4(x)=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{10^2}(x-9)-\frac{3\sqrt{5}}{10^4\cdot 2!}(x-9)^2+\frac{21\sqrt{5}}{10^6\cdot 3!}(x-9)^3-\frac{231\sqrt{5}}{10^8\cdot 4!}(x-9)^4$$

84. $f(x)=\sec x$; $n=3$ en potencias de $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Derivando sucesivamente 3 veces y evaluando en $x=\dfrac{\pi}{4}$

El polinomio de grado 3 es:

$$P_3(x)=\sqrt{2}+\sqrt{2}(x-\tfrac{\pi}{4})+\frac{3\sqrt{2}}{2!}(x-\tfrac{\pi}{4})^2+\frac{11\sqrt{2}}{3!}(x-\tfrac{\pi}{4})^3$$

85. $f(x)=\log_{10}x$; $n=5$ en potencias de $(x-1)$

Derivando sucesivamente 5 veces y evaluando en $x=1$

El polinomio de grado 5 es:

$$\begin{aligned}P_5(x)&=\frac{1}{\ln 10}\left[(x-1)-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3-\frac{6}{4!}(x-1)^4+\frac{24}{5!}(x-1)^5\right]\\&=\frac{1}{\ln 10}\left[(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\frac{1}{5}(x-1)^5\right]\end{aligned}$$

86. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; $n=5$ en potencias de $(x-1)$

Derivando sucesivamente 5 veces y evaluando en $x=1$

El polinomio de grado 5 es:

$$\begin{aligned}P_5(x)&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)+\frac{\frac{1}{4}}{2!}(x-1)^2-\frac{\frac{3}{8}}{3!}(x-1)^3+\frac{\frac{3}{4}}{4!}(x-1)^4-\frac{\frac{15}{8}}{5!}(x-1)^5\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{8}(x-1)^2-\frac{1}{16}(x-1)^3+\frac{1}{32}(x-1)^4-\frac{1}{64}(x-1)^5\end{aligned}$$

87. $f(x)=\sqrt[3]{x}$; $n=4$ en potencias de $(x-8)$

Derivando sucesivamente 4 veces y evaluando en $x=8$

El polinomio de grado 4 es:

$$\begin{aligned}P_4(x)&=2+\frac{1}{12}(x-8)-\frac{\frac{1}{144}}{2!}(x-8)^2+\frac{\frac{5}{3456}}{3!}(x-8)^3-\frac{\frac{5}{10368}}{4!}(x-8)^4\\&=2+\frac{1}{12}(x-8)-\frac{1}{288}(x-8)^2+\frac{10}{41472}(x-8)^3-\frac{10}{497664}(x-8)^4\end{aligned}$$

88. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$; $n=5$ en potencias de $\left(x-2\right)$

Derivando sucesivamente 5 veces y evaluando en $x=2$

El polinomio de grado 5 es:

$$P_5(x)=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}(x-2)-\frac{\frac{2}{27}}{2!}(x-2)^2+\frac{\frac{6}{81}}{3!}(x-2)^3-\frac{\frac{24}{243}}{4!}(x-2)^4+\frac{\frac{120}{729}}{5!}(x-2)^5$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}(x-2)-\frac{1}{27}(x-2)^2+\frac{1}{81}(x-2)^3-\frac{1}{243}(x-2)^4+\frac{1}{729}(x-2)^5$$

89. $f(x)=xe^{2x}$; $n=5$ en potencias de $\left(x-1\right)$

Derivando sucesivamente 5 veces y evaluando en $x=0$

$$P_5(x)=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{12}{4!}x^4=1-x^2+\frac{1}{2}x^4$$

90. $f(x)=\dfrac{1}{x^4+1}$; $n=4$ en potencias de $\left(x-1\right)$

Derivando sucesivamente 4 veces y evaluando en $x=1$

El polinomio de grado 4 es:

$$P_4(x)=\frac{1}{2}-(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3-\frac{42}{4!}(x-1)^4$$
$$=\frac{1}{2}-(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+(x-1)^3-\frac{7}{4}(x-1)^4$$

En los problemas del 91 al 100, encuentra el desarrollo en una serie de MaClaurin la función dada. Comprueba tu respuesta con el comando `PolinomioTaylor[ <Expresión>, <Valor de x>, <Número (orden)> ]` en la vista CAS de GeoGebra.

91. $f(x)=e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

92. $f(x)=\sec x=1+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{5}{4!}x^4+\ldots$

93. $f(x)=\operatorname{senh} x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

94. $f(x)=e^{-4x} =\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2)^{2n}}{n!}x^n$

95. $f(x)=\sqrt{x+1} =1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}x-\frac{\frac{1}{4}}{2!}x^2+\frac{\frac{3}{8}}{3!}x^3-\frac{\frac{15}{16}}{4!}x^4+\frac{\frac{105}{32}}{5!}x^5\cdots$

96. $f(x)=\operatorname{sen}^2 x =\frac{2}{2!}x^2-\frac{8}{4!}x^4+\frac{32}{6!}x^6-\frac{128}{8!}x^8\cdots$

97. $f(x)=\sqrt{x+1}\,\ln(x+1) = x-\frac{\frac{1}{4}}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4-\frac{\frac{71}{16}}{5!}x^5+\cdots$

98. $f(x)=\tan x = x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+\frac{272}{7!}x^7+\ldots$

99. $f(x)=\tan^{-1} x = x-\frac{2}{3!}x^3+\frac{24}{5!}x^5-\frac{720}{7!}x^7+\ldots$

100. $f(x)=\operatorname{sen}^{-1}x = x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{9}{5!}x^5+\frac{225}{7!}x^7+\ldots$

En los problemas 101 al 110, usa serie de potencias para evaluar la integral dada.

101. $\int \frac{e^{2x}}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}+2\ln x+\frac{4}{2!}x+\frac{8}{2\cdot 3!}x^2+\frac{16}{3\cdot 4!}x^3+C = -\frac{1}{x}+2\ln x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)n!}x^{n-1}+C$

102. $\int \frac{\operatorname{senh} x}{x}\,dx = x+\frac{1}{3\cdot 3!}x^3+\frac{1}{5\cdot 5!}x^5+\frac{1}{7\cdot 7!}x^7+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)(2n+1)!}x^{2n+1}+C$

103. $\int \frac{\ln x}{x-1}\,dx = x-\frac{1}{2^2}(x-1)^2+\frac{1}{3^2}(x-1)^3-\frac{1}{4^2}(x-1)^4+\ldots+C = \sum_{n=1}\frac{(-1)}{n^2}(x-1)^n+C$

104. $\int \frac{1}{1+x^5}\,dx = x-\frac{1}{5}x^6+\frac{1}{11}x^{11}-\frac{1}{16}x^{16}+\frac{1}{20}x^{21}+\ldots+C = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}x^{5n+1}+C$

105. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx = \ln(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{16}(x-1)^2+\frac{1}{48}(x-1)^3-\frac{5}{512}(x-1)^4+\frac{7}{1280}(x-1)^5+\ldots+C$

106. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{(x-8)^2}\,dx$

$$= 2\ln(x-8) + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{576}(x-8)^2 + \frac{5}{3(207366)}(x-8)^3 - \frac{5}{4(248832)}(x-8)^4 + \ldots + C$$

107. $\int \sqrt[3]{x^2+1}\,dx = x + \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{45}x^5 + \frac{5}{567}x^7 - \frac{10}{2187}x^9 + \ldots + C$

108. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{90}x^6 - \frac{1}{1680}x^7 + \frac{1}{720}x^8 + \ldots + C$

109. $\int \frac{\cos x}{e^x}\,dx = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{1}{4410}x^8 + \frac{1}{20160}x^9 + \ldots + C$

110. $\int \sqrt{x^3+1}\,dx = x + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{56}x^7 + \frac{1}{160}x^{10} - \frac{5}{364}x^{13} + \frac{7}{4096}x^{16} + \ldots + C$