Respuestas a la evaluación de la competencia del capítulo 4

Responde Falso o Verdadero.

1. La sucesión $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$ diverge. Falso.

2. La sucesión $\left\{(-1)^n \frac{n}{n^2-4}\right\}$ está definida para todo entero positivo. Falso.

3. La sucesión $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$ es no monótona. Verdadero.

4. La sucesión $\left\{(-1)^n \frac{n}{n^2-4}\right\}$ no tiene límite Falso.

5. Las sucesiones $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ y $\{0.5^n\}$ son iguales Verdadero.

6. Si $a_n \le N$ para todo n, entonces a_n es acotada superiormente. Verdadero.

7. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ siempre converge. Falso.

8. Toda serie finita de números reales tiene suma. Verdadero.

9. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1}$ es convergente Falso.

10. Toda serie geométrica es convergente. Falso.

Completa según corresponda

1. El intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}: -3<x<3$

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tan^{-1}n}$ es:0

3. El radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}(x-4)^n$ es: $(3,5]$

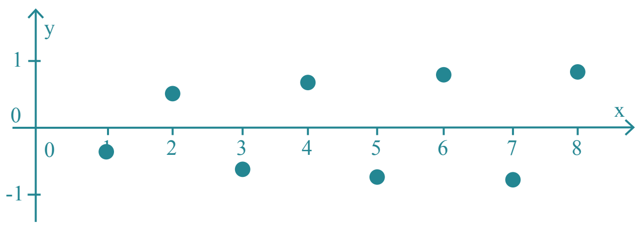
4. Si $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ entonces e^{2x} es igual a : $e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$

5. Si $\operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, el error al aproximar $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ con $n=5$ es igual a

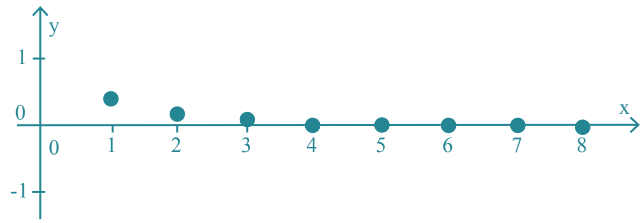
$error=-0.00026988$

En los problemas del 1 al 4, encuentra los primeros ocho términos de la sucesión dada y dibújalos en el plano cartesiano. Clasifícala como monótono o no monótona según corresponda.

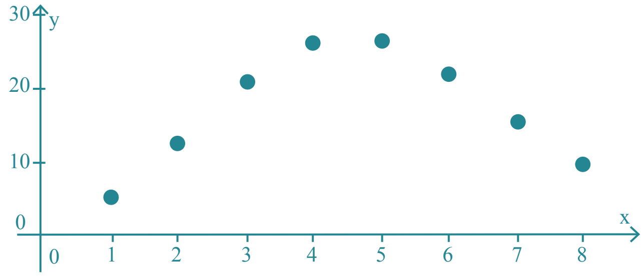
1. $\{a_n\}=\left\{-\frac{1}{3},\frac{2}{4},-\frac{3}{5},\frac{4}{6},-\frac{5}{7},\frac{6}{8},-\frac{7}{9},\frac{8}{10}\right\}$, sucesión no monótona alternante.



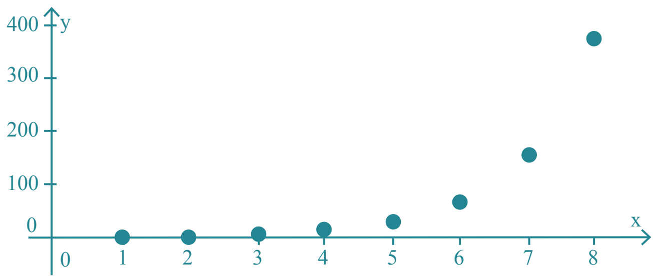
2. $\{a_n\}=\left\{\frac{2}{5},\frac{4}{25},\frac{8}{125},\frac{16}{625},\frac{32}{3125},\frac{64}{15625},\frac{128}{78125},\frac{256}{390625}\right\}$, monótona decreciente.



3. $\{a_n\}=\left\{5,\frac{25}{2},\frac{125}{6},\frac{625}{24},\frac{625}{24},\frac{3125}{144},\frac{15625}{1008},\frac{78125}{8064}\right\}$, no es monótona.



4. $\{a_n\}=\left\{e,\frac{e^2}{2},\frac{e^3}{3},\frac{e^4}{4},\frac{e^5}{5},\frac{e^6}{6},\frac{e^7}{7},\frac{e^8}{8}\right\}$, monótono creciente.



En los problemas del 5 y 6 encuentra el *n*-ésimo término de la sucesión dada.

5. $a_n=4n-7$

6. $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n^3}{n!}, n\geq 1$

En los problemas del 7 al 9, muestra que la serie dada es convergente y encuentra la suma.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1.2^n}$

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$

ii) $a_{n+1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n = a_n$ para todo n.

Por lo tanto, aplicando el criterio de la serie alternante, podemos concluir que la serie es convergente.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ $\quad S = \frac{1}{4}$ La serie converge.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^2 + 19n + 90}$ $\quad S = \frac{9}{10}$ La serie converge.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} 2(0.25)^{n-1}$ $\quad S = \frac{8}{3}$ La serie converge.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{4n^2+1}$ La serie es convergente, según el criterio de las series alternantes.

12. $\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{7}{12}\right)^n$ $\quad S = \frac{5}{1-\frac{7}{12}} = 12$ La serie converge.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+7}{6n-5}\right)^n$ Por el criterio de la raíz la serie converge.

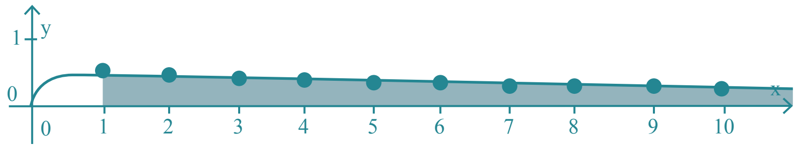
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{6^n}$ La serie converge.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{4+n^2}$ El criterio de la raíz no es concluyente.

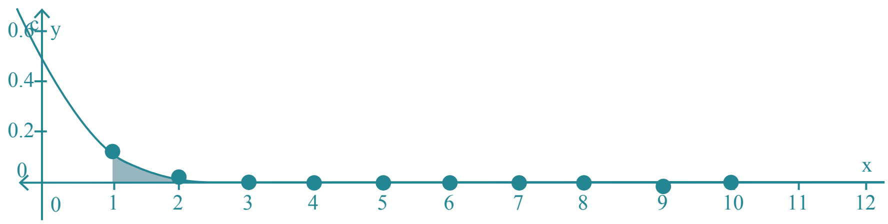
16. Se suelta una pelota de goma desde 30 metros de altura y esta rebota sobre una banqueta de concreto. Cada vez que la pelota rebota su altura es de $\frac{1}{3}$ de su altura anterior. ¿Qué distancia recorre la pelota antes de quedar en reposo? 60 metros.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{n+2}-\frac{6}{n+3}\right)$ Converge.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+n}$ Diverge.



19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{e^{n}+e^{-n}}$ Converge.



En los problemas del 20 al 22, determina si la serie dada es convergente o divergente y encuentra el radio de convergencia.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^4}x^n$ $=0$. La serie solo converge en $x=0$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{n^n}x^n$ =0. La serie es convergente para todo $x\in(-\infty,\infty)$.

22. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{8^n}x^n$ $L=\frac{1}{8}$. El intervalo de convergencia es $(-8,8)$.

En los ejercicios del 23 al 26, encuentra el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada.

23. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}x^{n}$ La serie es una serie geométrica centrada en cero y converge solo si $\left|\frac{x}{2}\right|<1$

entonces: $-1<\frac{x}{2}<1$ o $-2<x<2$.

24. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{3}}{3^{n}}x^{n}$ .El intervalo de convergencia es: $-3\leq x<3$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n)!}{10^{n}}x^{n}$ La serie converge solo en su centro $x=0$.

26. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^{n}}{n^{4}}$ .El intervalo de convergencia es: $2\leq x\leq 4$.

En los ejercicios 27 y 28, encuentra el polinomio de Taylor de la función dada en el grado indicado.

27. $f(x)=e^{x}\operatorname{sen}x; n=6$ en potencias de $(x-\pi)$

El polinomio de grado 6 es:

$$P_{6}(x)=-e^{\pi}(x-\pi)-\frac{2e^{\pi}}{2!}(x-\pi)^{2}-\frac{2e^{\pi}}{3!}(x-\pi)^{3}+\frac{4e^{\pi}}{5!}(x-\pi)^{5}+\frac{8e^{\pi}}{6!}(x-\pi)^{6}$$

28. $f(x)=\frac{x}{x^{3}+1}; n=4$ en potencias de $(x-1)$

El polinomio de grado 4 es:

$$\begin{aligned}P_{4}(x)&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)-\frac{\frac{3}{4}}{2!}(x-1)^{2}+\frac{\frac{33}{8}}{3!}(x-1)^{3}-\frac{\frac{33}{4}}{4!}(x-1)^{4}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)-\frac{3}{8}(x-1)^{2}+\frac{11}{16}(x-1)^{3}-\frac{11}{32}(x-1)^{4}\end{aligned}$$

En los problemas 29 y 30 encuentra el desarrollo en una serie de MaClaurin de la función dada.

29. $f(x)=e^{x}-e^{-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)!}x^{2n-1}$

30. $f(x)=\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-x-\dfrac{1}{3!}x^3-\dfrac{9}{5!}x^5-\dfrac{225}{7!}x^7+....$

31. $\displaystyle\int\frac{\cos x}{x}dx\quad=\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{(2n)!(2n)}x^{2n}+C$

32. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}x}{x^3}dx=-\frac{1}{x}-\frac{1}{6}x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{(2n+1)!(2n-1)}x^{2n-1}+C$

33. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{e^x}dx\ =\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+\frac{1}{30}x^6+...+C$

34. Evalúa la integral $\int_1^2 x^{\ln x}\,dx$, desarrollando primero en una serie de potencias con cuatro términos distintos de cero.

Entonces: $=\dfrac{17}{12}$