Capítulo 4

Correcciones cálculo Integral

Correcciones al Capítulo 4 de cálculo Integral

Página 212

Dice:

Una sucesión resulta ser un conjunto ordenado de números bajo cierta regla, la regla que determina los elementos de la sucesión es una función cuya variable, por lo regular *n*, sólo toma valores enteros positivos.

Debe decir:

Una sucesión resulta ser un conjunto ordenado de números bajo cierta regla. La regla que determina los elementos de la sucesión es una función a cuya variable independiente solo se le asignan valores enteros y positivos.

Página 213

Dice:

c) Asignando a *n* los valores de 1 a 5, los términos de la sucesión *n* son:

Debe decir:

c) Asignando a *n* los valores de 1 a 5, los términos de la sucesión $\{c_n\} = \left\{\dfrac{n}{2^n - 1}\right\}$ son:

Dice:

d) En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = 1\\
&a_3 = 1 + 1 = 2\\
&a_4 = 2 + 1 = 3\\
&a_5 = 3 + 2 = 5\\
&a_6 = 5 + 3 = 8\\
&a_7 = 8 + 5 = 13\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Debe decir:

d) En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = 1\\
&a_3 = a_1 + a_2 = 1+1 = 2\\
&a_4 = a_2 + a_3 = 1+2 = 3\\
&a_5 = a_3 + a_4 = 2+3 = 5\\
&a_6 = a_4 + a_5 = 3+5 = 8\\
&a_7 = a_5 + a_6 = 5+8 = 13\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Página 215

Dice:

Ejemplo 4.4 Gráfica de una sucesión

Grafica la sucesión $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}$.

Solución

En este caso, los términos de la sucesión son

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \frac{6}{37}, \frac{7}{50}, \frac{8}{65}, \frac{9}{82}, \frac{10}{101}, \ldots\right\}$$

Y los puntos que construyen la gráfica son

$$\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right), \left(2,\frac{2}{5}\right), \left(3,\frac{3}{10}\right), \left(4,\frac{4}{17}\right), \left(5,\frac{5}{26}\right), \left(6,\frac{6}{37}\right), \left(7,\frac{7}{50}\right), \left(8,\frac{8}{65}\right), \left(9,\frac{9}{82}\right), \left(10,\frac{10}{101}\right), \ldots\right\}$$

Debe decir:

Ejemplo 4.4 Gráfica de una sucesión

Grafica la sucesión $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}$.

Solución

En este caso, los términos de la sucesión son:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \frac{6}{37}, \frac{7}{50}, \frac{8}{65}, \frac{9}{82}, \frac{10}{101}, \ldots\right\}$$

Y los puntos que construyen la gráfica son:

$$\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right), \left(2,\frac{2}{5}\right), \left(3,\frac{3}{10}\right), \left(4,\frac{4}{17}\right), \left(5,\frac{5}{26}\right), \left(6,\frac{6}{37}\right), \left(7,\frac{7}{50}\right), \left(8,\frac{8}{65}\right), \left(9,\frac{9}{82}\right), \left(10,\frac{10}{101}\right), \ldots\right\}$$

Página 219

Dice:

Ejemplo 4.7 Límite de una sucesión alternante

Hallar el límite de la sucesión $\{a_n\} = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n^2+1}$

Solución los términos de la sucesión alternantemente positivos y negativos, así, los primeros 6 términos son

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, -\frac{4}{17}, \frac{5}{26}, -\frac{6}{37}, \ldots$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+1} = 0$, del teorema 4.2 se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n^2+1} = 0$

Debe decir:

Ejemplo 4.7 Límite de una sucesión alternante

Hallar el límite de la sucesión $\{a_n\} = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n^2+1}$

Solución los términos de la sucesión alternan con valores positivos y negativos, así, los primeros 6 términos son:

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, -\frac{4}{17}, \frac{5}{26}, -\frac{6}{37}, \ldots$$

Como $\operatorname{lím}\limits_{n\to\infty}|a_n| = \operatorname{lím}\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+1} = 0$, del teorema 4.2 se concluye que $\operatorname{lím}\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n^2+1} = 0$

Dice:

Ejemplo 4.8

Solución

Comenzaremos analizando el numerador, observe que este incrementa de uno en uno a partir del número 3 lo que nos sugiere que esto puede obtenerse mediante la expresión $n+2$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, luego el denominador son los cuadrados de los enteros. Al comparar a_n con n se tiene que

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{4}, \frac{5}{9}, \frac{6}{16}, \frac{7}{25}, \frac{8}{36}, \ldots, \frac{n+2}{n^2}$$

Así la sucesión resulta ser $\{a_n\} = \dfrac{n+2}{n^2}$

Debe decir:

Ejemplo 4.8

Solución

Comencemos analizando el comportamiento de los numeradores de los términos de la sucesión, observe que estos se incrementan de uno en uno a partir del número 3, lo cual puede obtenerse mediante la expresión $n+2$ para $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$.

En tanto, los denominadores son los cuadrados de los enteros $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$.

De tal manera que podemos considerar que:

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{4}, \frac{5}{9}, \frac{6}{16}, \frac{7}{25}, \frac{8}{36}, \ldots, \frac{n+2}{n^2}, \ldots \text{ con } n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Así la sucesión resulta ser $\{a_n\} = \dfrac{n+2}{n^2}$.

Página 220

Dice:

Ejemplo 4.9

Solución

En este caso, se tiene que los términos alternan entre positivo y negativo, esto se logra multiplicando el término por $(-1)^{n+1}$ para iniciar con el positivo y luego el negativo. Por otro lado, los términos van decreciendo a la mitad a medida que n aumenta, lo cual hace pensar que son potencias de $\dfrac{1}{2}$, sólo que para comenzar en 2 y no en $\dfrac{1}{2}$ hay que recorrer la sucesión dos posiciones a la izquierda, es decir $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$, así tenemos que

$$\left\{2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-2}}, \ldots\right\}$$

la sucesión resulta ser $\{a_n\} = \left\{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^{n-2}}\right\}$

Debe decir:

Ejemplo 4.9

Solución

a) En este caso los términos alternan entre positivos y negativos, eso se logra multiplicando el término por $(-1)^{n+1}$ para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, lo cual permite iniciar con el signo positivo seguido del signo negativo. Por otro lado, los términos van decreciendo a la mitad a medida que n aumenta, lo cual hace pensar que son potencias de $\frac{1}{2}$, solo que para comenzar en 2 y no en $\frac{1}{2}$ hay que recorrer la sucesión dos posiciones a la izquierda, es decir $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$, así tenemos que

$$\left\{2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-2}}, \ldots\right\} \text{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

la sucesión resulta ser $\{a_n\} = \left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-2}}\right\}$

Dice:

a) La x se toma como una constante, sus potencias resultan ser múltiplos del 2 comenzando en cero; luego, podemos considerar que el numerador de cada término es de la forma $x^{2(n\ \ 1)}$ el exponente genera los valores de las potencias de x en la sucesión. Factorizando los denominadores se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 &= 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 \\ 6 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ 24 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ 120 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \end{aligned}$$

Debe decir:

b) La x se toma como una constante y sus potencias resultan ser múltiplos de 2 comenzando en cero, así podemos considerar que el numerador de cada término es de la forma $x^{2(n\ \ 1)}$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

El denominador de cada término puede verse expresado en factores de la forma:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 &= 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 \\ 6 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ 24 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ 120 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \end{aligned}$$

Página 221

Dice:

$b)$ Los términos de la sucesión $4, 7, 10, 13, 16, 19, \cdots$ se van incrementando en 3 unidades cada vez e inician con el valor de 4.

Cuando se observa un incremento constante en los términos sucesivos de una secuencia de números, resulta práctico usar la regla siguiente:

I)Tomar como coeficiente de n a la cantidad en que se incrementan los términos, en este ejemplo será $3n$.
II)Sumar un segundo término independiente de n, al que denominaremos desplazamiento, el cual se obtiene como la cantidad que hay que sumar al primer término de la expresión en i) para que cuando $n=1$ se obtenga el primer elemento de la sucesión, es nuestro ejemplo

$$\begin{aligned} 3n + b &= 4 \\ 3(1) + b &= 4 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

III)Escribir la sucesión como $\{a_n\} = \{3n+1\}$

Debe decir:

$c)$ Los términos de la sucesión $\{4, 7, 10, 13, 16, 19, \cdots\}$ se van incrementando en 3 unidades cada vez e inician con el valor de 4.

Cuando se observa un incremento constante en los términos sucesivos de una secuencia de números, resulta práctico usar la regla siguiente:

I) Tomar como coeficiente de n a la cantidad en que se incrementan los términos, en este ejemplo será $3n$.
II) Sumar un segundo término b independiente de n, al que denominaremos desplazamiento, el cual se obtiene como la cantidad que hay que sumar al primer término de la expresión en i) para que cuando $n=1$ se obtenga el primer elemento de la sucesión, es nuestro ejemplo

$$\begin{aligned} 3n + b &= 4 \\ 3(1) + b &= 4 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

III)Escribir la sucesión como $\{a_n\} = \{3n+1\}$

Página 226

Dice:

Ejemplo 4.15 Sucesión simultánea

Solución

El primer ciclista recorre cada día n una distancia dada por $a_n = 1000 + 100(n-1)$, en tanto, el segundo recorre cada día una distancia $b_n = 200(2^{n-1})$, entonces cuando $n = 7$ se tiene que

$$a_{12} = 1000 + 1000(7-1) = 7000$$

$$b_{12} = 200(2^{7-1}) = 12800$$

El segundo ciclista estará recorriendo 12 800 metros mientras que el primero sólo 7 000 metros por día.

Debe decir:

Ejemplo 4.15 Sucesión simultánea

Solución

El primer ciclista recorre cada día n una distancia dada por $a_n = 1000 + 1000(n-1)$, en tanto, el segundo recorre cada día una distancia $b_n = 200(2^{n-1})$, entonces cuando $n = 7$ se tiene que

$$a_7 = 1000 + 1000(7-1) = 7000$$

$$b_7 = 200(2^{7-1}) = 12800$$

El segundo ciclista estará recorriendo 12800 metros mientras que el primero solo 7000 metros en el día 7.

Página 231

Dice:

Ejemplo 4.19 Serie telescópica divergente

Demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{9n^2-4}$ es convergente.

Solución

Al desarrollar la serie se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2} \\ &= \left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{4}-\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{6}\right)+\ldots \\ &= 2+1 \\ &= 3\end{aligned}$$

Observa que, salvo 2 y 1, todos los demás términos se cancelan por suma y resta. Por lo tanto, la serie converge y su suma es 3.

Debe decir:

Ejemplo 4.19 Serie telescópica convergente

Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2-2n}$ es convergente.

Solución

Al desarrollar la serie se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2} \\ &= \left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{4}-\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{6}\right)+\ldots \\ &= 2+1 \\ &= 3\end{aligned}$$

Observa que, salvo 2 y 1, todos los demás términos se cancelan por suma y resta. Por lo tanto, la serie converge y su suma es 3.

Página 232

Dice:

Ejemplo 4.20

Solución

La suma parcial S_n es

$$S_n = \underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}}_{n \text{ términos}}$$

Debe decir:

Ejemplo 4.20

Solución

La suma parcial S_n es

$$S_n = \underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}}_{n \text{ términos}}$$

Página 233

Dice:

Ejemplo 4.21 Serie geométrica convergente

Muestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n}$ converge y halla la suma.

Solución

Esta serie puede desarrollarse como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n} = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots \frac{5}{10^n} + \ldots = 0.5555\ldots$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n/}$$

Debe decir:

Ejemplo 4.21 Serie geométrica convergente

Muestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{10^n}$ converge y halla la suma.

Solución

Esta serie puede desarrollarse como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{10^n}=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\ldots\frac{5}{10^n}+\ldots=0.5555\ldots$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{10^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Dice:

Para una combinación de series se satisfacen las siguientes propiedades.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones y k un número real, tal que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S_1$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=S_2$, entonces

I) $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=kS_1$

II) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b)_n=S_1+S_2$

III) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b)_n=S_1-S_2$

Debe decir:

Para una combinación de series se satisfacen las siguientes propiedades.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones y k un número real, tal que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S_1$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=S_2$, entonces

I) $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=kS_1$

II) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=S_1+S_2$

III) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=S_1-S_2$

Página 234

Dice:

Definición 4.15 Series p

Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{1^p}+\frac{1}{1^p}+\frac{1}{1^p}+\dots$$

Donde p es una constante positiva se denomina serie p. Series como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ son ejemplos de series p.

Debe decir:

Definición 4.15 Series p

Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\dots\frac{1}{n^p}+\dots$$

Donde p es una constante positiva se denomina serie p.

Series como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ son ejemplos de series p.

Página 236

Dice:

Solución. ...

b) $\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=0}_{\text{Usando L´Höpital}}$, el criterio aplica. La serie diverge.

Debe decir:

Solución. ...

b) $\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}_{\text{Usando L´Höpital}}$, el criterio aplica. La serie diverge.

Página 239

Dice:

Actividad 4.3 El criterio de la razón puede ser implementado con el software complementario mediante los siguientes pasos que se describen en el sitio web:

1. Abra una hoja de trabajo.
2. Escriba el n-ésimo término de la serie como una función en x.
3. Escriba la razón $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.
4. Simplificar la razón.
5. Evalúa el $\lim\limits_{n\to\infty}$.

Debe decir:

Actividad 4.3 El criterio de la razón puede ser implementado en el software de apoyo mediante los siguientes pasos.

1. Abra una hoja de trabajo en formato CAS.
2. Escriba el n-ésimo término de la serie como una función $f(x)$.
3. Escriba la razón $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.
4. Simplificar la razón.
5. Evalúa el $\operatorname{lím}\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.

Página 242

Dice:

4.3.3 Criterio de la integral

Un tercer criterio para verificar si una serie converge o diverge es el criterio de la integral, el requisito en la serie es que esté conformada por términos positivos.

Criterio de la integral
Si f es continua, positiva y toma valores decrecientes para $x \geq 1$, y si $a_n = f(n)$, entonces

I) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es converge.

II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es diverge.

Debe decir:

4.3.3 Criterio de la integral

Un tercer criterio para verificar si una serie converge o diverge es el criterio de la integral, el requisito en la serie es que esté conformada por términos positivos.

Criterio de la integral
Si *f* es continua, positiva y toma valores decrecientes para $x \geq 1$, y si $a_n = f(n)$, entonces

I) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente.

II) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es divergente.

Página 242

Dice:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^4}\,dx \\ &\qquad b\to\infty \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

La integral resulta ser convergente, por tanto, la serie también es divergente.

Debe decir:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx &= \operatorname*{lím}_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^4}\,dx \\ &= \operatorname*{lím}_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^b \\ &= \operatorname*{lím}_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

La integral resulta ser convergente, por tanto, la serie también es convergente.

Página 244

Dice:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx \qquad u=\ln x \to du=\frac{1}{x}dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^{\ln b}\frac{1}{\sqrt{u}}du$$

$$=\lim_{b\to\infty}\Big[2\sqrt{x}\Big]_0^{\ln b}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\Big[2\sqrt{\ln b}-2\sqrt{0}\Big]$$

$$=\lim_{b\to\infty}\Big[\ln\left(b^2+1\right)-\ln 2\Big]$$

$$=\infty$$

Debe decir:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx \qquad u=\ln x \to du=\frac{1}{x}dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^{\ln b}\frac{1}{\sqrt{u}}du$$

$$=\lim_{b\to\infty}\Big[2\sqrt{x}\Big]_0^{\ln b}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\Big[2\sqrt{\ln b}-\cancel{2\sqrt{0}}\Big]$$

$$=\infty$$

Dice:

e) La función $f(x)=\dfrac{\tan^{-1}x}{1+x^2}$ satisface todas las condiciones impuestas por el criterio de la integral, entonces, evaluando la integral impropia tenemos

$$\int_1^{\infty}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx \qquad u=\tan^{-1}x\to du=\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{\tan^{-1}b}u\,du$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{u^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\tan^{-1}b}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\left(\tan^{-1}b\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}\right]$$

$$=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}$$

$$=\frac{\pi^2-1}{8}$$

Debe decir:

e) La función $f(x)=\dfrac{\tan^{-1}x}{1+x^2}$ satisface todas las condiciones impuestas por el criterio de la integral, entonces, evaluando la integral impropia tenemos

$$\int_1^{\infty}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx \qquad u=\tan^{-1}x\to du=\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}b}u\,du$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{u^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}b}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{\left(\tan^{-1}b\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2}\right]$$

$$=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2}$$

$$=\frac{3}{32}\pi^2$$

Página 245

Dice:

Actividad 4.4 Considera la serie p $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{1^p}+\frac{1}{1^p}+\frac{1}{1^p}+\cdots$, usa GeoGebra para mostrar que la serie converge si $p>1$ y diverge si $0<p\le 1$. Crea una lista de valores para los cuales la serie p converge con $p=2,3,4,5,6,7,8$.

Debe decir:

Actividad 4.4 Considera la serie p $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots$, usa el software de apoyo para mostrar que la serie converge si $p>1$ y diverge si $0<p\le 1$ utilizando el criterio de la integral. Utiliza los valores de $p=0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5$.

Dice:

Ejemplo 4.29 Serie alternante

Determina si la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{6n}{8n-4}$ es convergente o divergente.

Debe decir:

Ejemplo 4.29 Serie alternante

Determina si la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{6n}{8n^2-4}$ es convergente o divergente.

Página 245 y 246

Dice:

Solución

Verificando el cumplimiento de las dos condiciones que impone el criterio de las series alternantes tenemos

I) $a_n > a_{n+1} > 0$, implica que la serie sea decreciente por lo que podemos aplicar el criterio de la primera derivada par funciones con $f(x)=\frac{6x}{8x-4}$. Por la regla del cociente,

$$f'(x)=\frac{(8x-4)6-6x(8)}{(8x-4)^2}=-\frac{24}{(8x-4)^2}<0$$

Se deduce que f es decreciente y por lo tanto se cumple que la serie sea decreciente.

I) Evaluando el límite,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{8n-4}=\frac{3}{4}\neq 0$$

Aplicando el criterio del n-ésimo termina. Para la convergencia se deduce que la serie diverge.

Debe decir:

Solución

Verificando el cumplimiento de las dos condiciones que impone el criterio de las series alternantes tenemos

I) $a_n > a_{n+1} > 0$, implica que la serie sea decreciente por lo que podemos aplicar el criterio de la primera derivada para funciones con $f(x) = \dfrac{6x}{8x-4}$. Por la regla del cociente,

$$f'(x) = \frac{(8x^2-4)6 - 6x(16x)}{\left(8x^2-4\right)^2} = -\frac{48x^2+24}{(8x-4)^2} < 0$$

Se deduce que *f* es decreciente y por lo tanto se cumple que la serie sea decreciente.

I) Evaluando el límite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n}{8n^2-4} = 0$$

Aplicando el criterio del *n*-ésimo termina. Para la convergencia se deduce que la serie diverge.

Página 249

Dice:

Cuando se cumple la parte II del teorema 4.14, se dice que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ es absolutamente convergente en todo el intervalo abierto $(c-R, c+R)$. El siguiente teorema muestra una fórmula para determinar el radio de convergencia.

Debe decir:

Cuando se cumple la parte II del teorema 4.6, se dice que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ es absolutamente convergente en todo el intervalo abierto $(c-R, c+R)$. El siguiente teorema muestra una fórmula para determinar el radio de convergencia.

Página 250

Dice:

De donde se concluye que la serie sólo converge en $x = 0$. La serie es convergente para todo $x \in (-\infty, \infty)$.

Debe decir:

De donde se concluye que la serie es convergente para todo $x \in (-\infty, \infty)$.

Página 251

Dice:

La cual es una serie alternante, por el criterio 4.3.4, la serie es convergente.

Finalmente, el intervalo de convergencia es (1,3).

Debe decir:

La cual es una serie alternante, por el criterio 4.3.4, la serie es convergente.

Finalmente, el intervalo de convergencia es (1,3].

Página 258

Dice:

Entonces, la serie infinita que aproxima a la función es

$$e^{x^2} = 1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4 + \frac{120}{6!}x^6 + \frac{1680}{8!}x^8 + \ldots$$

La figura 4.12 muestra los diferentes polinomios que van construyendo la función.

Debe decir:

Entonces, la serie infinita que aproxima a la función es

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4 + \frac{120}{6!}x^6 + \frac{1680}{8!}x^8 + \ldots \\ &= 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots \end{aligned}$$

La figura 4.12 muestra los diferentes polinomios que van construyendo la función.

Página 261

Dice:

Actividad 4.5 Visualizando los polinomios de Taylor y MaClaurin de funciones elementales

1. Introduce la función $f(x)$ que deseas aproximar. Usa $f(x)=\cos x$
2. Usar valores de -2 a 2 e incrementos de 0.1
3. Para el grado de la aproximación usar valores de 0 hasta 10 con incrementos de 1.
4. Para generar el polinomio de Taylor, emplear el comando correspondiente del sotware de apoyo y en él usar la función que queremos desarrollar en un polinomio. El programa asignará el polinomio en una función que se observa en la vista algebraica.
5. Usar la función generada para observar su expansión
6. Ver los polinomios.
7. Cambiar la forma de las potencias de la serie.

Debe decir:

Actividad 4.5 Visualizando los polinomios de Taylor y MaClaurin de funciones elementales

Utiliza el software de apoyo para hallar la expansión en una serie de potencias apropiada de las funciones dadas hasta tener un polinomio con 5 términos distintos de cero.

a) $f(x)=\log x \text{ con } c=1$

b) $g(x)=xsen(x)\text{con c}=0$

c) $h(x)=e^{x}\cos(x) \text{ con } c=0$

Soluciones:

a) $f(x)=10.4231(x-1)^{5}-2.6058(x-1)^{4}+0.8686(x-1)^{3}-0.4343(x-1)^{2}+0.4343(x-1)$

b) $g(x)=\frac{1}{9!}x^{10}-\frac{1}{7!}x^{8}+\frac{1}{5!}x^{6}-\frac{1}{3!}x^{4}+\frac{1}{1!}x^{2}$

c) $h(x)=-\frac{1}{30}x^{5}-\frac{1}{6}x^{4}-\frac{1}{3}x^{3}+x+1$

Página 262

Dice:

Entonces, la función *f* se expresa como

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dividiendo la función $\cosh x$ entre x obtenemos la nueva serie

$$\frac{\cosh x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6} + \cdots = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

Nótese que la serie tuvo que adelantarse a $n = 1$ debido a que se extrajo el término $\frac{1}{x}$
Tomando la integral en ambos lados de la expresión anterior se tiene que

$$\int \frac{\cosh x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6} + \cdots \right) dx = \int \left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \right] dx$$

$$= \ln x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \frac{x^6}{6 \cdot 6} + \cdots = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n(2n)!} + C$$

Debe decir:

Entonces, la función *f* se expresa como

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dividiendo la función $\cosh x$ entre x obtenemos la nueva serie

$$\frac{\cosh x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} + \cdots = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

Nótese que la serie tuvo que adelantarse a $n = 1$ debido a que se extrajo el término $\frac{1}{x}$
Tomando la integral en ambos lados de la expresión anterior se tiene que

$$\int \frac{\cosh x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6} + \cdots \right) dx = \int \left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \right] dx$$

$$= \ln x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \cdots = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n(2n)!} + C$$

Página 263

Dice:

Ejemplo 4.41 Integral de la función Si (x)

Evalúa $\frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$

Debe decir:

Ejemplo 4.41 Integral de la función Si (x)

Calcular $\frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$

Dice:

La integral puede construirse como

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right] dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

Debe decir:

La integral puede construirse como

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right] dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + c$$

Página 264

Dice:

Actividad 4.6 Usa el software de apoyo para encontrar un polinomio de grado n de una función f y luego aproxima las siguientes integrales con el grado n indicado.

a) $\int \frac{\cos x}{x^2} dx$ con $n = 10$

b) $\int \frac{e^{-x^2}}{x} dx$ con $n = 10$

c) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^4} dx$ con $n = 24$

Debe decir:

Actividad 4.6 Usa el software de apoyo para encontrar un polinomio de grado n de una función f y luego aproxime las siguientes integrales con el grado n indicado.

a) $\int \frac{\cos x}{x^2} dx$ con $n = 10$

b) $\int \frac{e^{-x^2}}{x} dx$ con $n = 10$

c) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^4} dx$ con $n = 24$

Solución

a) $\int \frac{\cos x}{x^2} dx = \frac{1}{3628800}\left(-\frac{1}{9}x^9 + \frac{90}{7}x^7 - 1008x^5 + 50400x^3 - 1814400x - \frac{3628800}{x} + C\right)$

b) $\int \frac{e^{-x^2}}{x} dx = -\frac{1}{1200}x^{10} + \frac{1}{192}x^8 - \frac{1}{36}x^6 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1n(|x|) + C$

c) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{25}x^{25} - \frac{1}{21}x^{21} + \frac{1}{17}x^{17} - \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{5}x^5 + x\Big|_{-1}^{1} = 1.7708$