PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC2252 — Matemáticas Discretas

Solución de la Guía 3

1. Falso, ver ejercicio (2c).

2. Todas las relaciones serán sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$

   a) Simétrica y refleja pero no transitiva: $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$.

   b) Refleja y transitiva pero no simétrica: $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$.

   c) Simétrica y transitiva pero no refleja: $R = \phi$.

4. *a*) Una relación refleja debe contener todas las tuplas de la forma $<x, x>$, que son exactamente n. El total de posibles tuplas con elementos de A es n^2, por lo cual tenemos $n^2 - n$ posibles tuplas que pueden estar o no estar presentes en la relación. Por esta razón tenemos 2^{n^2-n} posibles relaciones reflejas en A.

   b) Las relaciones simétricas son aquellas en que si tenemos la tupla $< x, y >$ también tenemos $< y, x >$, o más formalmente, aquellas que cumplen $\forall x \forall y, x\mathrm{R}y \rightarrow y\mathrm{R}x$. Tenemos dos tipos de tupla: aquellas de la forma $< x, y >$ con $x = y$ o aquellas con $x \neq y$. De las primeras tenemos n y de las segundas tenemos $n^2 - n$. Cada una de las primeras puede estar o no estar en la relación sin mayor problema, por lo que tenemos por el momento 2^n posibles combinaciones. De las segundas sin embargo tenemos que para cada tupla hay una tupla inversa que debe estar o no estar en la relación si la primera está o no está respectivamente. Por lo tanto, solamente tenemos la mitad de posibles combinaciones de estas tuplas en una relación, o sea $2^{\frac{n^2-n}{2}}$. Juntando ambas combinaciones tenemos que la cantidad de posibles relaciones simétricas que podemos tener en un conjunto con n elementos es $2^n * 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{n+\frac{n^2-n}{2}}$

   c) Una relación antisimétrica significa que si tenemos la tupla $< x, y >$ no tenemos $< y, x >$ a menos que $x = y$, o bien más formalmente, $\forall x \forall y, x\mathrm{R}y \wedge y\mathrm{R}x \rightarrow x = y$. Nótese que una relación antisimétrica no es lo contrario de simétrica; pueden ser simétricas y asimétricas a la vez o ninguna de las dos.

   Igual que en el caso anterior, tenemos las tuplas $<x, y>$ divididas en aquellas con $x = y$ o aquellas con $x \neq y$. Al igual que antes, cada una de estas n tuplas puede estar o no y se respeta la condición de antisimetría, por lo que tenemos 2^n combinaciones posibles. En los otros $n^2 - n$ casos, tenemos que para cada tupla $<x, y>$ existe una única tupla inversa $<y, x>$ cuya presencia en la relación depende de la presencia de la tupla original, con la diferencia de que ahora tenemos tres casos posibles: está la primera, la segunda o ninguna. Por lo tanto tenemos $\frac{n^2-n}{2}$ pares de tuplas con tres posibles estados, lo que genera $3^{\frac{n^2-n}{2}}$ combinaciones posibles. Multiplicando por la cantidad de combinaciones que teníamos antes, obtenemos que hay $2^n * 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ relaciones posibles.

5. *a*) Para obtener la máxima cantidad posible de pares tenemos todas las tuplas de la forma $<x, x>$, o sea n, y la mitad de las tuplas de la forma $<x, y>$ con $x \neq y$, que son $\frac{n^2-n}{2}$. Sumando, obtenemos que la cantidad máxima de tuplas que puede tener una relación antisimétrica es $n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$.

b) La cantidad de tuplas de la forma $<x, x>$ es constante; todas las relaciones antisimétricas con la máxima cantidad de tuplas deben incluirlas a todas. Donde se puede elegir es en las tuplas de la forma $<x, y>$ con $x \neq y$. Agrupando de a pares las tuplas de la forma $<x, y>$ con las $<y, x>$ obtenemos $\frac{n^2-n}{2}$ grupos. De cada uno de estas parejas, una relación deberá incluir exactamente una tupla. Por lo tanto, existen $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ relaciones antisimétricas sobre A que contienen la máxima cantidad de relaciones.

7. Veamos todas las propiedades por separado:

- Reflexividad: Necesitamos probar que $x\, R_{//} \circ R_{\perp}\, x$. Esto es equivalente a probar que $\forall x \exists y \,|\, xR_{//}y \wedge yR_{\perp}x$, pero es evidente que una recta no puede ser a la vez perpendicular y paralela a otra recta, luego $R_{//} \circ R_{\perp}$ no es refleja.
- Simetría: Ahora tenemos que probar que $x\, R_{//} \circ R_{\perp}\, y \Longrightarrow y\, R_{//} \circ R_{\perp}\, x$:

$$\forall x, y \left(\exists z_1, z_2 \,|\, xR_{//}z_1 \wedge z_1 R_{\perp} y \Longrightarrow yR_{//}z_2 \wedge z_2 R_{\perp} x \right)$$

  Pero sabemos que $R//$ es refleja, por lo que escogemos $z_1 = x, z_2 = y$:

$$\forall x, y \left(xR_{//}x \wedge xR_{\perp}y \Longrightarrow yR_{//}y \wedge yR_{\perp}x \right)$$

  Entonces eliminamos las proposiciones que son siempre verdaderas:

$$\forall x, y \, (xR_{\perp}y \Longrightarrow yR_{\perp}x)$$

  Lo cual es verdadero pues $R_{\perp}$ es simétrica. Por ende, $R_{//} \circ R_{\perp}$ es simétrica.
- Antisimetría: Ya sabemos que la relación es simétrica. Además, las rectas $a : y = 1$ y $b : x = 1$ son tales que $a \neq b$ y $a\, R_{//} \circ R_{\perp}\, b$ (a es paralela a la recta $y = 0$, la que a su vez es perpendicular con b). Por lo tanto, la relación no es antisimétrica.
- Transitividad: Debemos mostrar que

$$x\, R_{//} \circ R_{\perp}\, y \wedge y\, R_{//} \circ R_{\perp} z \Longrightarrow x\, R_{//} \circ R_{\perp}\, z.$$

  Probamos por contradicción: asumimos que la relación es transitiva. Luego decimos que:

$$x\, R_{//} \circ R_{\perp}\, y$$
$$y\, R_{//} \circ R_{\perp}\, x$$

  Si la primera afirmación es verdadera, entonces ambas lo son pues $R_{//} \circ R_{\perp}$ es simétrica. Si las combinamos por medio de transitividad, obtenemos:

$$x\, R_{//} \circ R_{\perp}\, x$$

  Pero esto es falso, pues $R_{//} \circ R_{\perp}$ no relaciona a un elemento con sigo mismo. Por tanto, la relación no puede ser transitiva.

8. Demostraremos cada una de las propiedades por separado:

- Simetría: Debemos demostrar que $xRy \Longrightarrow yRx$:

$$xRy \Longleftrightarrow f(x) = f(y) \Longleftrightarrow f(y) = f(x) \Longleftrightarrow yRx$$

- Reflexividad: Debemos probar que $\forall x \in A, xRx$. Pero por la definición de función, sabemos que $\forall x \in A, f(x) = f(x)$, de lo que desprende trivialmente que $\forall x \in A, xRx$.
- Transitividad: Debemos demostrar que $xRy \wedge yRz \Longrightarrow xRz$:

$$xRy \wedge yRz \Longleftrightarrow f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Longrightarrow f(x) = f(z) \Longleftrightarrow xRz$$

10. *a*) 1) - ($\Rightarrow$) Si R es refleja, entonces $[M_R]_{(i,j)} = 1$ para $i = j$. Luego, M_R tiene un uno en toda la diagonal, y por ende $I_n \leq M_R$

- ($\Leftarrow$) Si $I_n \leq M_R$, entonces $[M_R]_{(i,j)} = 1$ para $i = j$, pues lo mismo ocurre con I. Esto quiere decir que xRx para todos los elementos del conjunto: la relación R es refleja.

3)

- ($\Rightarrow$) Si R es antisimétrica, la única forma de que xRy y yRx es si $x = y$. Por lo tanto, sólo puede ser que $[M_R]_{(i,j)} = 1$ y $[M_R]^T_{(i,j)} = 1$ si $x = y$. Así, $M_R \wedge M_R^T$ sólo puede contener 1's en la diagonal, y por ende $M_R \wedge M_R^T \leq I_n$
- ($\Leftarrow$) Si $M_R \wedge M_R^T \leq I_n$, entonces si $[M_R]_{(i,j)} = 1$ y $[M_R]^T_{(i,j)} = 1$ se cumple que $x = y$, osea que si xRy y yRx se cumple $x = y$, la relación es antisimétrica.