RELACIONES Y FUNCIONES

Ing. Juan Sacerdoti

Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática

Universidad de Buenos Aires

2002

V 2.01

INDICE

4.6.4.- RELACIONES DE ORDEN
4.6.4.1.- RELACIÓN DE ORDEN ESTRICTO (ROE)
4.6.4.2.- RELACIÓN DE ORDEN AMPLIO (ROA)
4.6.4.3.- RELACIÓN DE ORDEN TOTAL
4.6.4.4.- TEOREMAS DE RELACIONES DE ORDEN

4.- RELACIONES Y FUNCIONES

4.1.- PAR ORDENADO (PO)

4.1.1.- DEFINICIÓN DE PO

Se llama Par Ordenado o dupla cuyo símbolo es ***(x y)*** al conjunto cuyos elementos son a su vez otros dos conjuntos :

1.- el conjunto {x y} que es un par simple
2.- el conjunto {x} de un único elemento

Def: ***(x y) := { {x y} {x} }***

(x y) : Par Ordenado (PO)
x : Primer elemento del PO (Primera componente del PO)
y : Segundo elemento del PO (Segunda componente del PO)

Obs 1: PO es un par de conjuntos (es un Conjunto de Conjuntos) donde ***{x y}*** $\in$ ***(x y)***

Obs 2: La igualdad de PO es la de Conjuntos

Obs 3: Primer y segundo elemento es una forma de llamar a las componentes del PO, porque los números todavía no están definidos. Justamente el concepto de número se definen a partir del PO.

4.1.2.- PORQUÉ LA DEFINICIÓN DE PO

La importancia del PO se desprende de la simplicidad (facilidad, claridad, comodidad) con que a partir de el se puede estructurar una red de definiciones con los principales elementos de la matemática clásica.

La fecunda utilización del PO se puede observar en la lista siguiente, que obvia todo comentario:

1.- Producto Cartesiano
2.- Relación
3.- Relación Unívoca
4.- Función
5.- Relación de Equivalencia
6.- Relación de Orden
7.- Número Natural
8.- Número Entero
9.- Número Fraccionario
10.- Estructura Métrica
11.- Número Real
12.- Numero Complejo
13.- Estructura Algebraicas
14.- Leyes de Composición
15.- Estructura Lineal (Vectorial)
16.- Coordenadas Cartesianas
17.- Grafos
18.- Etc

Para la definición del PO pilar de la matemática, hace falta solamente la noción previa de conjunto.

Un par simple es un conjunto formado por 2 elementos, cuyo símbolo es

{x y} : Par

y cumple con la igualdad de conjuntos

{x y} = {y x}

donde se observa que a los elementos ***x*** e ***y*** del par no se les asigna ninguna característica particular que les otorgue un papel diferente dentro del Par. Es decir son simplemente y nada mas que elementos del Par.

Mientras en el PO a sus dos elementos x e y, se les asigna una característica diferencial, la de ser primer o segundo elemento (componente). La definición de PO se introduce justamente para asignar a cada elemento de un par simple propiedades específicas.

Por ejemplo el conjunto de manos de una persona constituyen un Par si no se da una diferencia entre ellas. Sin embargo si se distinguen la mano izquierda de la derecha se está en presencia de un PO al haberle asignado a los elementos del par una característica diferencial.

Análogamente se tiene otro ejemplo en el conjunto Matrimonio que esta formado por un par de personas, y se distingue entre hombre y mujer se tiene un par ordenado.

El papel diferente de ambas componentes es la base para establecer el concepto de Relación en general.

La forma de asignar una característica diferente a los elementos x e y es por medio de diferenciar su presencia en los conjuntos que lo definen:

1.- {x, y} donde se define el Par
2.- {x} donde se define la primera componente

4.1.3.- IGUALDAD DE PO

La igualdad de PO es simplemente un caso particular de la Igualdad de Conjuntos.

T.- ***(x y) = (a b)*** $\Leftrightarrow$ ***{ {x y} {x} } = { {a b} {a} }***

La igualdad de conjuntos cumple con el teorema siguiente T_1:

La igualdad de dos PO es condición necesaria y suficiente de la igualdad de las componentes homólogas es decir de las primeras componentes entre si y las segundas componentes entre si.

Esto justifica, como la definición de PO distingue ambos elementos.

4.1.4.- TEOREMAS DE PO

T_1.- $\quad (x\ y) = (a\ b) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

TCR T_1.- $\quad (x\ y) \neq (a\ b) \Leftrightarrow x \neq a \vee y \neq b$

D.- [$\Leftarrow$] Se pasa a la demostración del Teorema directo .

Por Hipótesis
$x = a \wedge y = b$

Entonces
$\{x\} = \{a\}$
$\{x\ y\} = \{a\ b\}$
$\{\{x\ y\}\ \{x\}\} = \{\{a\ b\}\ \{a\}\}$

Por Def. PO queda
$(x\ y) = (a\ b)$

[$\Rightarrow$] Partiendo de
$(x\ y) = (a\ b)$

Recordando Def. PO
$\{\{x\ y\}\ \{x\}\} = \{\{a\ b\}\ \{a\}\}$

Se presentan 2 opciones que se llamarán I y II

I.- $\{x\ y\} = \{a\ b\}$
$\{x\} = \{a\}$
$x \equiv a$
y para satisfacer el sistema I también debe resultar
$y \equiv b$

II.- $\{x\ y\} = \{a\}$
$\{x\} = \{a\ b\}$
$x \equiv a \equiv y \equiv b$

que satisface el sistema II.

De ambas opciones I , II se llega a
$x \equiv a \wedge y \equiv b$

T_2.- $\quad (x\ y) = (y\ x) \Leftrightarrow x \equiv y$
TCR T_2.- $\quad (x\ y) \neq (y\ x) \Leftrightarrow x \neq y$

D_1.- Caso particular de T_1

D_2.- [$\Leftarrow$] $x \equiv y$
$\{x\} = \{y\}$
$\{x\ y\} = \{y\ x\}$
$\{\{x\ y\}\ \{x\}\} = \{\{y\ x\}\ \{y\}\}$

Por la Def. PO
$(x\ y) = (y\ x)$

[⇒]

$$(x\ y) = (y\ x)$$
$$\{\{x\ y\}\ \{x\}\} = \{\{y\ x\}\ \{y\}\}$$

Hay 2 Opciones I y II

I.- $\{x\ y\} = \{y\ x\}$
$\{x\} = \{y\}$
$x \equiv y$
que satisface el sistema I

II.- $\{x\ y\} = \{y\}$
$\{x\} = \{y\ x\}$
$x \equiv y$
que satisface el sistema II. El resultado de las opciones I y II es el mismo. Por lo tanto la Tesis es
$x \equiv y$

Obs: El TCR T_2 representa la propiedad fundamental de los PO:

$$(x\ y) \neq (y\ x) \quad \Leftrightarrow \quad x \neq y$$

y muestra la diferencia esencial entre los PO y los pares simples que cumplen en todos los casos

$$\{x\ y\} = \{y\ x\}$$

T_3.- ***Def PO*** $\Rightarrow$ $(x\ x) = \{\{x\}\}$

D.- $(x\ x) := \{\{x\ x\}\ \{x\}\}$
$= \{\{x\}\ \{x\}\}$
$= \{\{x\}\}$

4.1.5.- TERNAS Y NUPLAS

4.1.5.1.- TERNAS

La definición de Par Ordenado se puede generalizar para el caso de tres componentes (ternas) o más componentes, en general para ***n*** componentes (nuplas):

Def: $(x\ y\ z) := \{\ \{x\ y\ z\}\ \{x\ y\}\ \{x\}\ \}$
(x y z) : Terna
x : Primer elemento de la terna
y : Segundo elemento de la terna
z : Tercer elemento de la terna

Obs : Si se hubiera definido la terna por la proposición

$(x\ y\ z) := ((x\ y)\ z)$ (definición no válida)

se habría tomado un conjunto de conjuntos de diferentes niveles

$(x\ y\ z) := \{\{(x\ y)\ z\},\{(x\ y)\}\} := \{\{\{\{x\ y\}\{x\}\}\ z\ \},\{\{\{x\ y\}\{x\}\}\}\}$

lo cual es erróneo.

4.1.5.2.- NUPLAS

Def: $(x_1\ x_2 \dots x_n) := \{ \{ x_1\ x_2 \dots x_n \} .. \{ x_1\ x_2 \} \{ x_1 \} \}$

$(x_1\ x_2 \dots x_n)$ **:** Nupla
x_i **:** ***i-esimo componente de la nupla***

4.1.5.3.- NUPLA DE 1 ELEMENTO

A fin de generalizar el concepto de nupla para todo valor de $n \geq 1$ se define también para el caso de $n = 1$

Def: $(x) := \{\{x\}\}$

Obs : Nótese que del T_3 resulta

$$
\begin{aligned}
(x\ x) &:= \{\{x\}\} \\
&= (x)
\end{aligned}
$$

4.2.- PRODUCTO CARTESIANO (PC)

4.2.1.- DEFINICIÓN DE PC

Dado 2 conjuntos A y B se llama Producto Cartesiano de A por B (en ese orden), cuyo símbolo es ***AxB,*** al conjunto de ***todos*** los pares ordenados ***(x y)*** tales que su primera componente ***x*** pertenece a ***A*** y la segunda ***y*** pertenece a ***B***.

Def: $\boldsymbol{AxB := \{ (x\ y) : x \in A \wedge y \in B \}}$

AxB : Producto Cartesiano de A por B
A : Primer Conjunto del Producto Cartesiano o Conjunto de Partida
B : Segundo Conjunto del Producto Cartesiano o Conjunto de Llegada

Ejemplo 1:

A = { Azul Rojo Blanco Verde Negro Metalizado }
B = { Ferrari Honda Williams Lotus }

AxB = { (Azul Ferrari) (Azul Honda) (Azul Williams) (Azul Lotus)
(Rojo Ferrari) (Rojo Honda) (Rojo Williams) (Rojo Lotus)
(Blanco Ferrari) (Blanco Honda) (Blanco Williams) (Blanco Lotus)
(Verde Ferrari) (Verde Honda) (Verde Williams) (Verde Lotus)
(Negro Ferrari) (Negro Honda) (Negro Williams) (Negro Lotus)
(Metalizado Ferrari) (Metalizado Honda) (Metalizado Williams) (Metalizado Lotus) }

Un Producto Cartesiano puede ser representado gráficamente en un ábaco cartesiano. De allí su nombre:

B							***AxB***
L	x	x	x	x	x	x	
W	x	x	x	x	x	x	
H	x	x	x	x	(nh)	x	
F	x	x	x	x	x	x	
	a	***r***	***b***	***v***	***n***	***m***	***A***

4.2.2.- TEOREMAS DE PC

T_1.- $\boldsymbol{AxB = BxA \Leftrightarrow A = B}$
TCR T_1.- $\boldsymbol{AxB \neq BxA \Leftrightarrow A \neq B}$

D.- [$\Leftarrow$] $A = B$
$AxB = BxA$

[$\Rightarrow$] $A \neq B$
Se presentan 2 opciones I y II

I.- $\exists x: x \in A \wedge x \notin B$
$\exists (xy): (x\ y) \in AxB \wedge (x\ y) \notin BxA$
$AxB \neq BxA$

II.- $\exists x$: $x \notin A \wedge x \in B$

$\exists (xy)$: $(x\ y) \notin AxB \ \wedge \ (x\ y) \in BxA$

$AxB \neq BxA$

T_2.- $\boldsymbol{AxB = \varnothing \ \Leftrightarrow \ A = \varnothing \ \cup \ B = \varnothing}$

4.2.3.- PC DE MAS DE DOS CONJUNTOS

Dado n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se llama Producto Cartesiano $A_1 x A_2 x \ldots x A_n$ al conjunto de todas las nuplas ordenadas $(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ tales que la componente x_i pertenece al conjunto

Def: $A_1 x A_2 x \ldots x A_n := \{ (x_1\ x_2 \ldots x_n) : x_i \in A_i \}$

$A_1 x A_2 x \ldots x A_n$ ***: Producto Cartesiano*** A_1 ***por*** A_2 ***por … por*** A_n

A_i ***: Conjunto i-ésimo del Producto Cartesiano***

Es común el Producto Cartesiano de un conjunto por si mismo dos o mas veces, en ese caso la notación se abrevia:

Def: $E^2 := ExE$

$E^n := ExEx \ldots xE$ ***{ n veces }***

Ejemplos : $R^2 := RxR$

$R^n := RxRx \ldots xR$ ***{ n veces }***

4.3.- RELACIÓN R

Se llama ***Relación*** en AxB a todo ***Subconjunto <u>no</u> vacío del Producto Cartesiano AxB***

Def: $R \in$ ***Relación AxB*** $:= R \subset AxB\ ,\ R \neq \varnothing$
$R(AxB) := S(AxB) := \{ (x\ y) : (x\ y) \in R \}$

R ***: Relación AxB*** $:= R \subset AxB\ ,\ R \neq \varnothing$
S(AxB) : Gráfica de R(AxB)
A: Conjunto de Partida o Primer Conjunto del Producto Cartesiano
B: Conjunto de Llegada o Segundo Conjunto del Producto Cartesiano

Se define además algunos elementos destacados de la ***Relación R*** en ***AxB***

Def: $D(R) := \{ x:\ x \in A \wedge \exists (x\ y) \in R \}$
$I(R) := \{ y:\ y \in B \wedge \exists (x\ y) \in R \}$

D(R) : Dominio de R(AxB)
I(R) : Imagen de R(AxB)}

Una representación de R(AxB) sobre el Producto Cartesiano es:

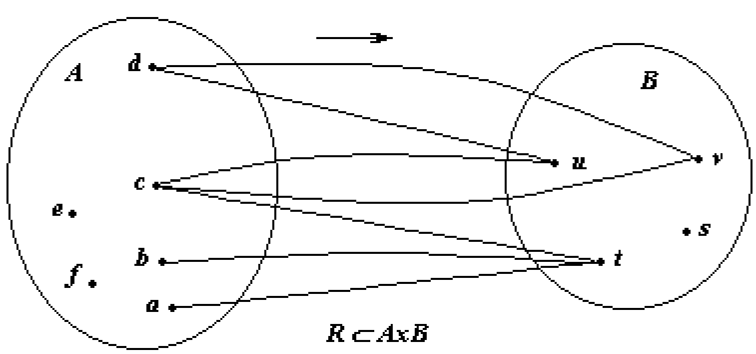
B ***AxB***

Relación

V	x	X	x	x	x	x
U	x	X	x	x	x	x
T	x	X	x	x	(et)	x
S	x	X	x	x	x	x
	a	***B***	***c***	***d***	***e***	***f***

A

Otra representación de una relación R(AxB) es por Gráficas como las que se muestran a continuación:
Los Conjuntos Ay B y sus elementos se representan por Diagramas de Venn y los PO que componen la Relación por segmentos orientados (flechas).



A = { a b c d e f }
B = { s t u v]
Gráfica (R) = { (a t) (b t) (c t) (c u) (c v) (d u) (d v) }
Dominio (R) = { a b c d }
Imagen (R) = { t u v }

4.4.- RELACIÓN UNIVOCA (RU)

Def: $\quad R \in \textit{Unívoca} := \left.\begin{array}{l} (xy) \in R \\ (xz) \in R \end{array}\right\} \Rightarrow y \equiv z$

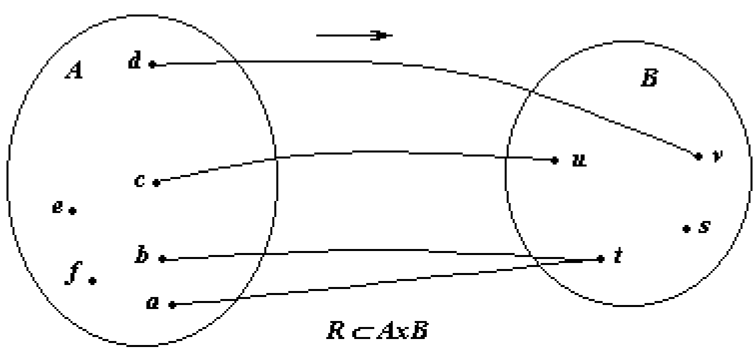
Relación no unívoca

B							***AxB***
v	x	x	x	x	x	x	
u	x	x	x	x	x	x	
t	x	x	x	x	(et)	x	
s	x	x	x	x	x	x	
	a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***A***

Relación unívoca

B							***AxB***
v	x	x	x	x	x	x	
u	x	x	x	x	x	x	
t	x	x	x	x	(et)	x	
s	x	x	x	x	x	x	
	a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***A***

En la representación de una relación univoca por segmentos orientados se caracteriza por la condición que de los elementos del dominio sale una flecha sola o ninguna.



R ⊂ AxB

R ∈ Unívoca

Obs: En una Relación Unívoca de cada Elemento del Conjunto de Partida A sale una flecha o ninguna . {0,1}. Con respecto al Conjunto de Llegada B no existen restricciones.

4.5.- FUNCIÓN

4.5.1.- DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Una ***función*** es una ***relación*** que cumple 2 condiciones:

1.- Estar ***definida para todo elemento del Conjunto de Partida A***. Es decir que el Dominio de la Relación f es el Conjunto de Partida: ***A = D***
2.- Ser ***Unívoca***

$$\textbf{Def:}\quad \begin{matrix} f : A \to B \\ x \to y \end{matrix} \quad := \quad \begin{cases} \forall x \in A \quad \exists (xy) \in f \\ f \in \text{Unívoca} \quad := \quad \left. \begin{matrix} (xy) \in f \\ (xz) \in f \end{matrix} \right\} \Rightarrow \quad y \equiv z \end{cases}$$

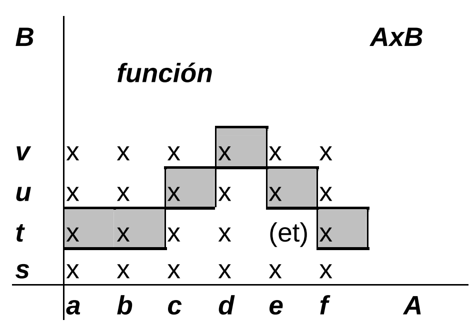
$$D(f) := \{ x: \ x \in A \wedge \exists (x\,y) \in f \} = A$$
$$I(f) := \{ y: \ y \in B \wedge \exists (x\,y) \in f \}$$
$$f(AxB) := \{ (x\,y) : \ (x\,y) \in f \}$$

f : función
A : Conjunto de Partida o Primer Conjunto del Producto Cartesiano ó Dominio de la función
B : Conjunto de Llegada o Segundo Conjunto del Producto Cartesiano ó Codominio de la función
f(AxB) :Gráfica de la función
I(f) :Imagen de f(AxB)

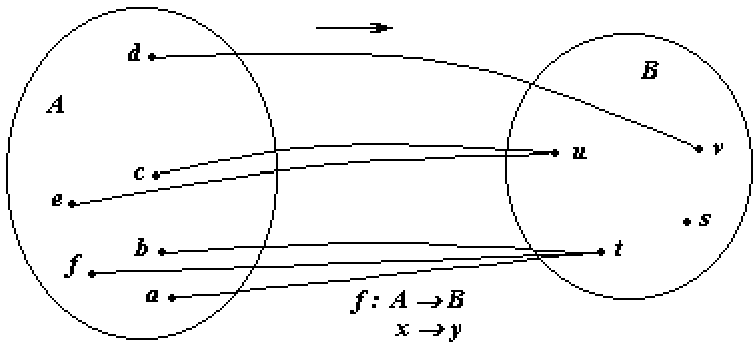
Obs 1: Nótese que el símbolo ***[A→B]*** representa al Producto Cartesiano ***AxB*** y el símbolo ***[x→y]*** representa al PO ***(x y).*** Es decir que las dos flechas tienen significado diferente , y es por ello que la flecha que señala al PO a veces se la indica con una colita [x +→ y] para diferenciarla de la flecha que señala el PC. Esto se obvia si no hay confusión posible.

$$\begin{matrix} f : A \to B \\ x \to y \end{matrix} \quad := \quad \begin{matrix} f : AxB \\ (xy) \end{matrix}$$

Una primera forma de representar una función es con un gráfico Cartesiano donde puede observarse las 2 proposiciones que hacen a la definición de función:
1.- El estar ***definida para todo elemento del Dominio A = D***.
2.- Ser ***Relación Unívoca.***



La representación de una función por diagramas de Venn es:



A = { a b c d e f }
B = { s t u v]
Gráfica (f) = { (a t) (b t) (c u) (d v) (e u) (f t) }
Dominio (f) = { a b c d e f } = A
Imagen (f) = { t u v }

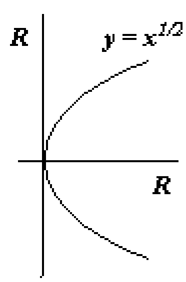
Obs 1: En una función de cada elemento del Conjunto de partida A sale una flecha y solo una {1}. Con respecto al Conjunto de Llegada B no existen restricciones.

Obs 2: En la definición de función existen 4 elementos, el primero de los cuales es su nombre, y los otros 3 elementos son 3 conjuntos el Dominio, el Codominio y la Gráfica, de las cuales depende la función. Cambiando cualquiera de estos 3 Conjuntos cambia la función. Se plantean un ejemplo:

Ejemplo: Sea el Conjunto de pares ordenados $\boldsymbol{G := \{(x\ y) : y = x^{1/2}\}}$

1.- Este Conjunto G carece de sentido si no se aclara que son x e y . Pueden ser elementos de cualquier conjunto genérico (que significaría $y = x^{1/2}$?), o números reales o complejos etc. Esto muestra que debe definirse el PC AxB sobre el cual se quiere trabajar.

Suponiendo que AxB = RxR entonces G sería la Gráfica siguiente:



2.- Si se toma A = R no existe función pues
  2.1.- La relación no es unívoca
  2.2.- La relación no está definida para todo elemento de R. Es decir D = A ≠ R

3.- Si se restringe a $A = R^+ \cup \{0\}$ no existe función pues
  3.1.- La relación no es unívoca

4.- Si se restringe a $A = R^+ \cup \{0\}$ y a $B = R^+ \cup \{0\}$ si existe función, que se llamará arbitrariamente RaízCuad:

$$\textbf{\textit{RaízCuad:}}\ \boldsymbol{R^+ \cup \{0\} \rightarrow B = R^+ \cup \{0\}}$$
$$\boldsymbol{x \rightarrow y = x^{1/2}}$$

5.- Pero también se podría haber elegido arbitrariamente a $A = [\,0\ 2\,]$ y los siguientes subconjuntos de G:

$x \in [0\ 1[$ $\quad y = +x^{1/2}$
$x \in [1\ 2]$ $\quad y = -x^{1/2}$

lo cual permite definir otra función que se llamará f_2 diferente por supuesto de la anterior RaízCuad:

$$f_2:\ [\,0\ 2\,] \rightarrow R^{+} \cup \{0\}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} y = +x^{1/2} & x \in [0\ \ 1[\\ y = -x^{1/2} & x \in [1\ \ 2] \end{cases}$$

todo este análisis muestra como una función depende no solamente de su Gráfica, sino también de sus Conjuntos de Partida y de Llegada.

4.5.2.- REDUCCIÓN DE UNA RELACIÓN GENÉRICA A FUNCIÓN

Una Relación Genérica R siempre puede reducirse a una función , en forma totalmente arbitraria, por medio de dos pasos que consisten en hacer cumplir las dos definiciones de la definición de función:

Paso I: Reducir el Conjunto de Partida de la relación D(f) para que se cumpla D(R) = D(f) o también reducirlo a parte de D(R) [$D(f) \subset D(R)$]. Es decir que para todo elemento del Dominio de la función D(f) exista por lo menos un elemento en la Gráfica G o sea: $D(f) \subset D(R)$.

Paso II.- Asignar a cada elemento de D(f) un solo par de la Gráfica G (Unicidad).

4.5.2.- PORQUE FUNCIÓN

El objetivo de definir el concepto de función, es decir una relación univoca para todo un dominio es porque permite la implicación

$$\forall x \in A \qquad x = y \;\Rightarrow\; f(x) = f(y)$$

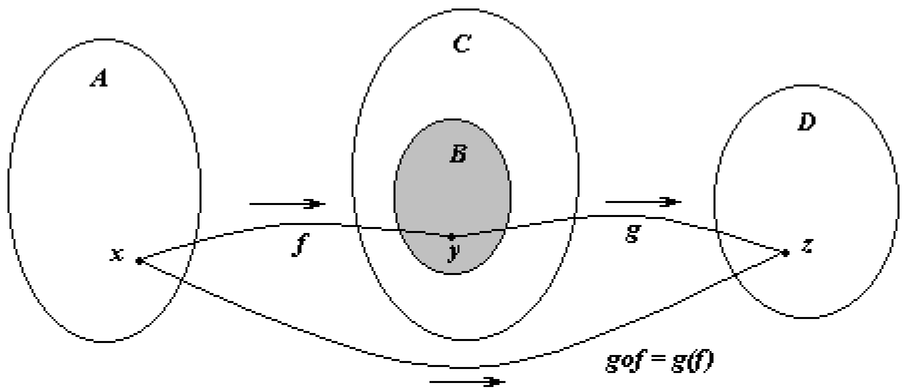
Por otro lado la importancia de la definición de función resulta de su gran aplicación. Algunas funciones matemáticas entre las más usuales:

Tipo	***función***
Sucesiones	$S:N\rightarrow B$
Matrices	$M:N^2\rightarrow B$
Leyes de Composición Interna	$T:ExE\rightarrow E$
Leyes de Composición Externa	$T:KxE\rightarrow E$
Productos Hermíticos	$T:ExE\rightarrow K$
Polinomios	$P:R^2\rightarrow R^2$ $x\rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
Funciones de 1 variable real	$P:R\rightarrow R$
Funciones de varias variables reales	$P:R^n\rightarrow R$
Funciones de variable compleja	$P:R^2\rightarrow R^2$

4.5.4.- FUNCIÓN COMPUESTA

4.5.4.1.- DEFINICIÓN DE FUNCIÓN COMPUESTA

Si se plantea una composición sucesiva de funciones también se tiene una función directa de A a D como se vera a continuación:



la relación compuesta es función si se toma la precaución de asegurar que $B \subset C$

Teorema

$$\left.\begin{array}{l} f\ : A \to B \\ \qquad x \to y \\ g : C \to D \\ \qquad y \to z \\ B \subset C \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} gof\ : A \to D \\ \qquad x \to z = g(\ f(\ x\ )) \end{array}$$

gof = g(f) : función compuesta de g con f

D.-

$$f : A \to B \ := \ \forall x \in A \ \exists (xy) \in f \ \wedge \left.\begin{array}{l} (\ xy\ ) \in f \\ (\ xy'\ ) \in f \end{array}\right\} \Rightarrow \ y = y'$$

$$g : C \to D \ := \ \forall y \in C \ \exists (yz) \in g \ \wedge \left.\begin{array}{l} (\ yz\ ) \in g \\ (\ yz'\ ) \in g \end{array}\right\} \Rightarrow \ z = z'$$

como $B \subset C$ se tiene

$$\forall y \in B \ \exists (yz) \in g \ \wedge \left.\begin{array}{l} (\ yz\ ) \in g \\ (\ yz'\ ) \in g \end{array}\right\} \Rightarrow \ z = z'$$

por lo tanto se puede se puede definir una relación sobre ***AxD*** que para todo elemento de A tenga un par en la relación y además sea unívoca:

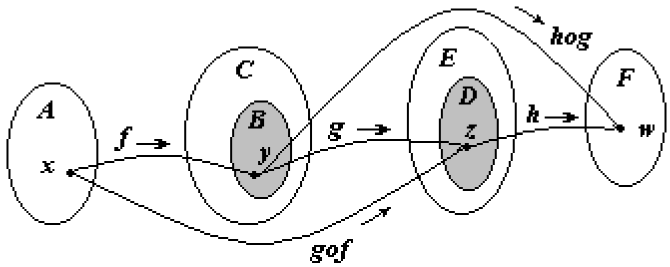
$$gof : A \to D \ := \ \forall x \in A \ \exists (xz) \in gof \ \wedge \left.\begin{array}{l} (\ xz\ ) \in gof \\ (\ xz'\ ) \in gof \end{array}\right\} \Rightarrow \ z = z'$$

Existe entonces una función llamada compuesta ***gof*** que se define como:

$$\begin{array}{l} gof\ : A \to D \\ \qquad x \to z = g(\ f(\ x\ )) \end{array}$$

<u>*4.5.4.2.- TEOREMAS*</u>

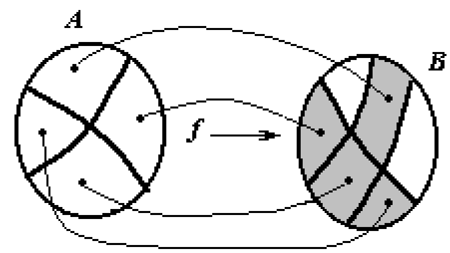
T_1.- Def $gof = g(f)$ $\Rightarrow$ $ho(gof) = (hog)of$



4.5.5.- CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES SEGUN EL CODOMINIO

4.5.5.1.- DEFINICIÓN DE FUNCIÓN INYECTIVA

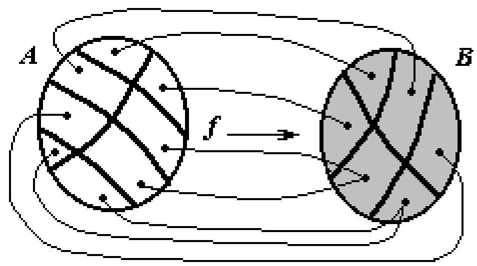
Def: $\quad f \in \textit{Inyectiva} := \left.\begin{array}{l} (xy) \in f \\ (zy) \in f \end{array}\right\} \Rightarrow x \equiv z$



Obs: A cada elemento del Codominio llega una flecha o ninguna {0,1}.

4.5.5.2.- DEFINICIÓN DE FUNCIÓN SURYECTIVA

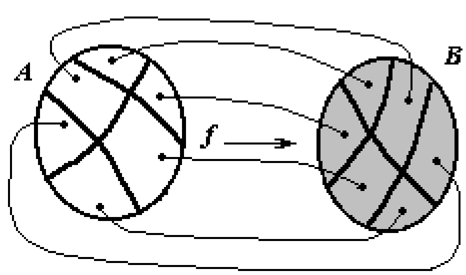
Def: $\quad f \in \textit{Suryectiva} := \forall y \in B \; \exists (xy) \in f$



Obs: A todo elemento del Codominio llega por lo menos una flecha. {1,n}.

4.5.5.3.- DEFINICIÓN DE FUNCIÓN BIYECTIVA

Def: $\quad f \in \textit{Biyectiva} := \left\{\begin{array}{l} f \in \textit{Inyectiva} \\ f \in \textit{Suryectiva} \end{array}\right.$



Obs: A todo elemento del Codominio llega una flecha y solo una {1}.

4.5.6.- FUNCIÓN INVERSA

4.5.6.1.- DEFINICIÓN DE FUNCIÓN INVERSA

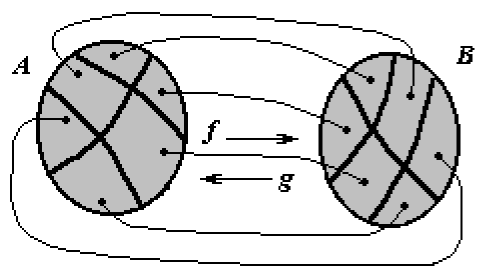
Def: función inversa de f

$$\begin{matrix} g : B \to A \\ y \to x \end{matrix} \quad := \quad \begin{cases} f : A \to B \\ \quad x \to y \quad =: (xy) \in f \\ \forall y \in B \quad \exists (yx) \in g \\ g \in \text{Unívoca} \quad := \left.\begin{matrix} (yx) \in g \\ (zx) \in g \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad y \equiv z \end{cases}$$

g: función inversa de f

La notación habitual de la función inversa es

$$f^{-1} := g$$



4.5.6.2.- TEOREMAS

T_1.- $\exists g : g \in$ función inversa de $f \Leftrightarrow f \in$ Biyectiva

D.- [$\Leftarrow$] la relación g(BxA) se define como

g(BxA) := {(yx) : (xy) $\in$ f }

por ser f biyectiva, es simultáneamente inyectiva y suryectiva

$$f \in \text{Inyectiva} := \left.\begin{matrix} (xy) \in f \\ (zy) \in f \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad x \equiv z$$

$$f \in \text{Suryectiva} := \quad \forall y \in B \;\; \exists (xy) \in f$$

La relación g es entonces:

1.- Unívoca porque f es inyectiva
2.- Está definida para todo el conjunto B por ser f suryectiva

por lo tanto es g función

[$\Rightarrow$] La condición suficiente se demuestra a partir de la definición de g.

1.- Como g es unívoca porque entonces f es inyectiva
2.- Como g cumple $\forall y \in B\ \exists (xy) \in f$ entonces f suryectiva

por lo tanto es f es biyectiva

T_2.- $g \in$ ***función inversa de f*** $\Leftrightarrow \quad g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$

T_3.- $g \in$ ***función inversa de f*** $\Leftrightarrow \quad g \in$ ***biyectiva***

Obs: Usado en definición de Natural

T_4.- $\left.\begin{matrix} f \in biy \\ g \in biy \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad gof \in biy$

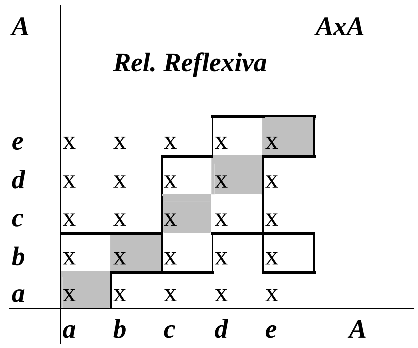
T_5.- $g: A \rightarrow A$
$x \rightarrow x$ ***función identidad*** $\Rightarrow \quad f = f^{-1}$

4.6.- RELACIONES BINARIAS: RELACIONES EN AxA

4.6.1.- RELACIONES REFLEXIVA, SIMÉTRICA TRANSITIVA Y DE EQUIVALENCIA

4.6.1.1.- RELACIÓN REFLEXIVA

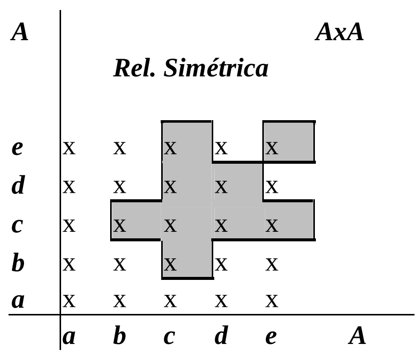
Def: ***$R \in$ Reflexiva*** ***:=*** ***$\forall x \in A \quad (x\ x) \in R$***



Obs : La relación es ***Reflexiva si contiene toda la diagonal Principal*** del Producto Cartesiano AxA.

4.6.1.2.- RELACIÓN SIMÉTRICA

Def: ***$R \in$ Simétrica*** ***:=*** ***$(x\ y) \in R \Rightarrow (y\ x) \in R$***



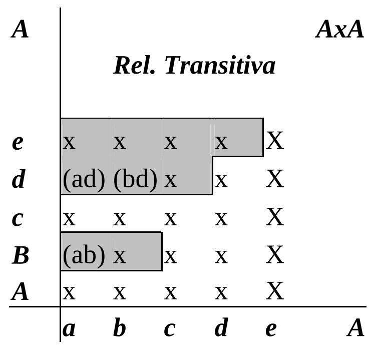
Obs: La relación es ***Simétrica si los pares ordenados*** del Producto Cartesiano AxA son ***Simétricos respecto de la Diagonal Principal.***

Teorema ***$R \in$ Simétrica*** ***:=*** ***$(x\ y) \in R \Leftrightarrow (y\ x) \in R$***

D.- Por definición de Relación Simétrica
$(x\ y) \in R \Rightarrow (y\ x) \in R$
$(y\ x) \in R \Rightarrow (x\ y) \in R$

4.6.1.3.- RELACIÓN TRANSITIVA

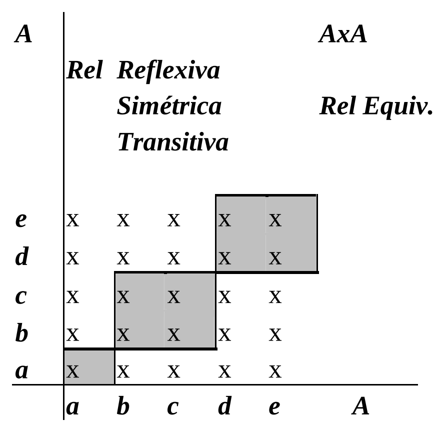
Def: $R \in \textit{Transitiva} \;:=\; \left.\begin{matrix}(x, y) \in R \\ (y, z) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x, z) \in R$



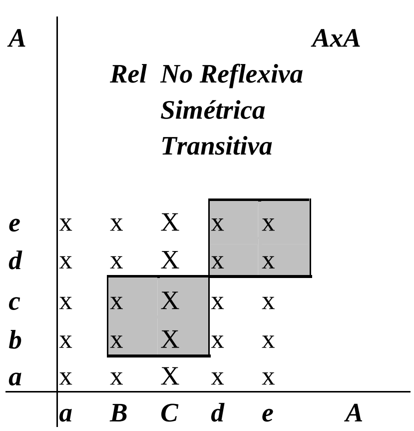
Obs: La relación es ***Transitiva*** cuando: dado dos pares ***(x,y)*** y ***(y,z)*** de la relación R, existe un tercer par ***(x, z)*** que también pertenece a la relación. Este último es el par que está en la misma columna del primero y fila del segundo. (jaque de torres)

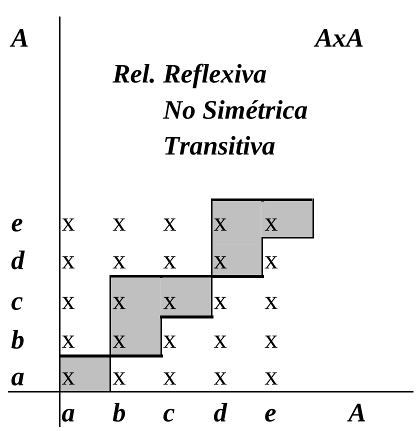
4.6.1.4.- COMPATIBILIDAD E INDEPENDENCIA DE LAS RELACIONES REFLEXIVA, SIMÉTRICA Y TRANSITIVA

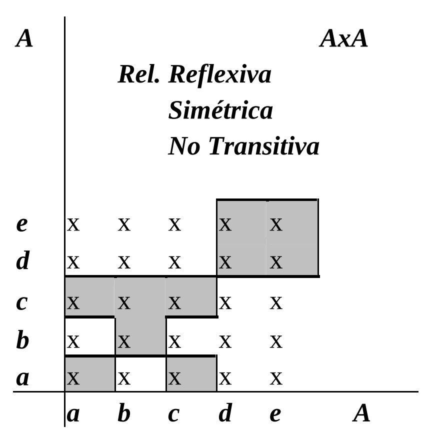
Compatibilidad



Independencia







(b c) ∧ (c a) /⇒ (b

Las relaciones ***Reflexivas, Simétrica y Transitiva son compatibles e independientes*** como se demuestra en los ejemplos expuestos.

Obs: En particular la relación Reflexiva es independiente de las Simétrica y transitiva:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{R \in Simétrica} \\ \boldsymbol{R \in Transitiva} \end{array}\right\} \not\Rightarrow \boldsymbol{R \in Reflexiva} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{(R\in Simétrica) \wedge (R\in Transitiva) \wedge (R \notin Reflexiva) \neq \varnothing}$$

Sin embargo hay una ***aparente*** demostración de que la condición de relación ***Simétrica y Transitiva implica la de Reflexiva . Esta demostración es falsa ,*** a pesar de lo que parecería en un primer análisis:

Demostración aparente de la proposición no válida

Por ser R una relación Simétrica

$$\boldsymbol{(x\ y)\in R \quad \Rightarrow \quad (y\ x)\in R}$$

y por ser R una relación Transitiva

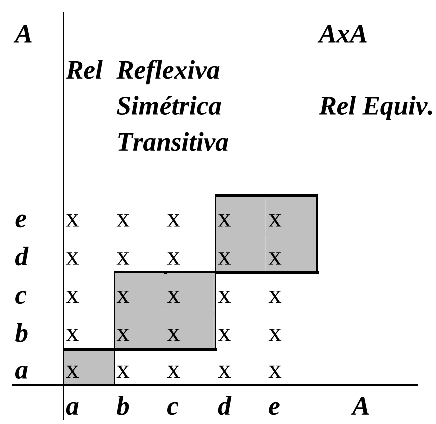
$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{(x, y)\in R} \\ \boldsymbol{(y, x)\in R} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{(x, x)\in R}$$

La proposición demostrada ***no es válida para todos los elementos x del conjunto A*** por lo tanto la condición de simetría y transitividad no aseguran la reflexividad.

<u>*4.6.1.5.- RELACIÓN DE EQUIVALENCIA*</u>

A partir de la compatibilidad e independencia de las Relaciones Reflexiva, Simétrica y Transitiva se puede definir:

Def: $\boldsymbol{R\in Equivalencia \ := \ \left\{\begin{array}{l} R \in Reflexiva \\ R \in Simétrica \\ R \in Transitiva \end{array}\right.}$



Ejemplos: Son Relaciones de Equivalencia

[=] Igualdad de Conjuntos en general
y en particular Igualdad de Números Naturales, Enteros, Fraccionarios, Reales y Complejos.
[≡] Identidad de elementos
[⇔] Doble Implicación de Proposiciones
[||] Paralelismo de Rectas y Planos
[≅] Semejanza de figuras y Congruencias

4.6.2.- CLASE DE EQUIVALENCIA (CE)

4.6.2.1.- DEFINICIÓN DE CE

Def: R∈ Equivalencia

CE(x) := { y : (x y) ∈ RE }

CE(x) : Clase de equivalentes al elemento x con respecto a RE

4.6.2.2.- DEFINICIÓN DE CONJUNTO COCIENTE

Def: R∈ Equivalencia

CE(x) := { y : (x y) ∈ RE }

P := { CE(x) }

P : Conjunto Cociente: Conjunto de las Clases de equivalencia de RE

4.6.2.3.- TEOREMAS

T_1.-

$$\left.\begin{array}{ll} X := \{ x \} & \\ Y := \{ y \} & \\ f : X \to Y & : f \in biyectiva \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \exists RE \\ \exists CE(x) := \{ y : (xy) \in RE \} \end{cases}$$

4.6.3.- RELACIONES A-REFLEXIVA , A-SIMÈTRICA, A-TRANSITIVA Y ANTISIMÈTRICA

4.6.3.1.- RELACIÓN A-REFLEXIVA

Def: $R \in$ *A-Reflexiva* $:= R \notin$ *Reflexiva*

$$:= \;/\!\!\!\forall x \in A \quad (x\,x) \in R$$

$$:= \exists x \in A \quad (x\,x) \notin R$$

Obs: La relación es ***A-Reflexiva si no contiene a Toda la Diagonal Principal*** del Producto Cartesiano AxA.

4.6.3.2.- RELACIÓN A-SIMÈTRICA

Def: $R \in$ *A-Simétrica* $:= R \notin$ *Simétrica*

$$:= \exists (x\,y) \in R \quad \not\Rightarrow \quad (y\,x) \notin R$$

$$:= \exists (x\,y) \in R \quad \wedge \quad (y\,x) \notin R$$

Obs: La relación es ***A-Simétrica si existe algún par ordenado de la relación no Simétrico*** respecto de la Diagonal Principal del Producto Cartesiano AxA.

4.6.3.3.- RELACIÓN A-TRANSITIVA

Def: $R \in$ *A-Transitiva* $:= R \notin$ *Transitiva*

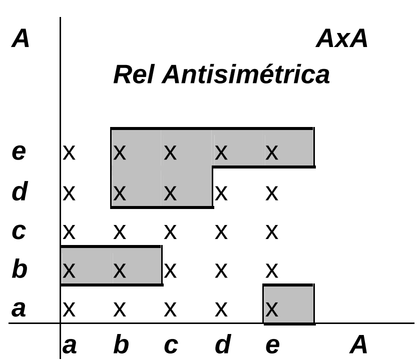
$$:= \left.\begin{array}{l}(x, y) \in R \\ (y, z) \in R\end{array}\right\} \quad \not\Rightarrow \quad (x, z) \in R$$

4.6.3.4.- RELACIÓN ANTISIMÈTRICA

La definición de Antisimetría se apoya sobre la existencia previa de una Relación de Equivalencia RE.

Def: $R \in$ *Antisimétrica /RE* $:=$

$$\begin{cases} RE \in Equivalencia \\ \left.\begin{array}{l}(xy) \in R \\ (yx) \in R\end{array}\right\} \Rightarrow (xy) \in RE \end{cases}$$



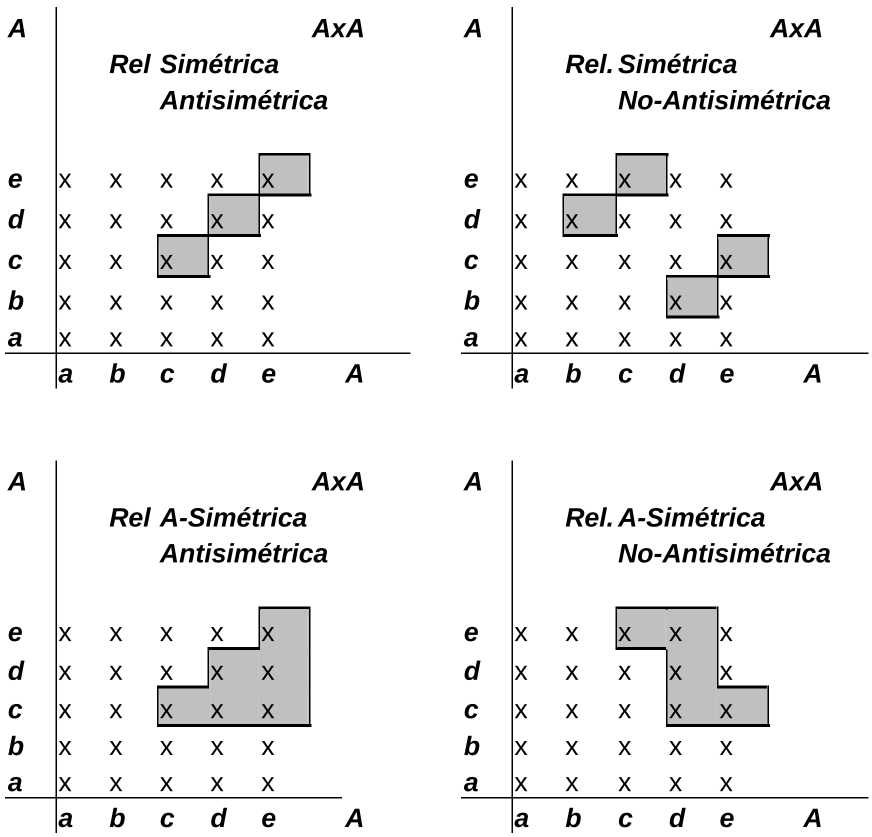
Obs 1: La definición de la ***Relación Antisimétrica*** significa que ***no coexisten en la relación pares simétricos salvo los (x x)*** que están en la diagonal principal.

Esto se observa fácilmente tomando la Proposición Contrarrecíproca (PCR) de la definición dada:

PCR Proposición Contrarrecíproca

$$\boldsymbol{R \in \text{Antisimétrica} \ /RE \quad :=} \quad \begin{cases} \boldsymbol{RE \in \text{Equivalencia}} \\ \boldsymbol{(xy) \notin RE \Rightarrow [(xy) \notin R \cup (yx) \notin R]} \end{cases}$$

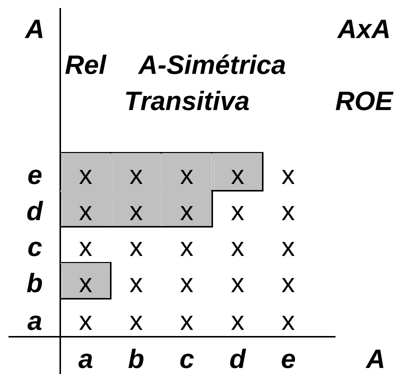
Obs 2: Las relaciones Antisimétricas son independientes y compatibles con las relaciones Simétricas y A-Simétricas, es decir las pueden ser simultáneas, como lo prueban los siguientes ejemplos:



4.6.4.- RELACIONES DE ORDEN

4.6.4.1.- RELACIÓN DE ORDEN ESTRICTO (ROE)

Def: $R \in \textit{Orden Estricto} \;:=\; \begin{cases} R \in A-\textit{Simétrica} \\ R \in \textit{Transitiva} \end{cases}$

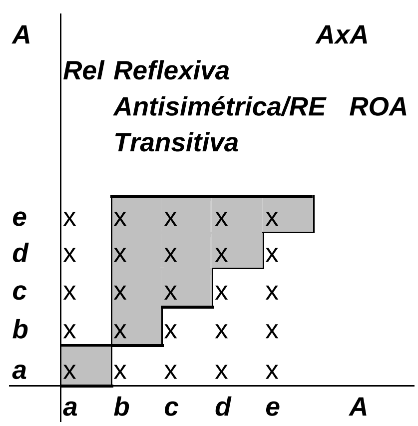


Ejemplos: Son Relaciones de Orden Estricto

[>] Mayor de Números Naturales Enteros, Fraccionarios y Reales

4.6.4.2.- RELACIÓN DE ORDEN AMPLIO (ROA)

_Def: $R \in \textit{Orden Amplio/RE} \;:=\; \begin{cases} R \in \textit{Re flexiva} \\ R \in \textit{Antisimétrica / RE} \\ R \in \textit{Transitiva} \end{cases}$



Ejemplos: Son Relaciones de Orden Amplio

[⊂] Inclusión de Conjuntos
[⇒] Implicación de Proposiciones
[≥] Mayor o igual de Números Naturales Enteros, Fraccionarios y Reales

Obs: Las notaciones usuales para las relaciones de orden son $x \geq y$ ó $x\, R\, y$ ó $(x\, y) \in R$ **.** Se ha preferido la última notación para evitar confusiones.

4.6.4.3.- RELACIÓN DE ORDEN TOTAL

Una tipificación de Relación de Orden tanto para ROE como para ROA es la de ser Total sobre el Conjunto A. Esto es cuando para todo elemento x de A , existe por lo menos un par ordenado (x y) en la relación de Orden

Def: $R \in$ ***Orden Total /A*** $:= \forall x \in A \quad (x\, y) \in R \cup (y\, x) \in R$

$R \in$ ***Orden Total /A : Relación de Orden Total sobre A***

4.6.4.4.- TEOREMAS DE RELACIONES DE ORDEN

Teorema: Dado una ROA [ROE] (de mayor o menor), existe siempre otra ROA [ROE] (de menor o mayor), que es la simétrica de la primera con respecto a la diagonal principal del AxA .