CIRCUITOS DE EULER Y HAMILTON

Orlando Arboleda Molina

Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación de
La Universidad del Valle

8 de septiembre de 2008

Contenido

Contenido

Caminos de Euler

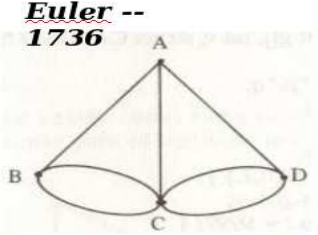

Figura: Ciudad de konigsberg

Reseña histórica: Los ciudadanos tomaban largas caminatas los domingos. Ellos se preguntaron si era posible iniciar en un sitio, cruzar por todos los puentes una sola vez, y regresar al punto de partida.

Contenido

Circuitos de Euler (2)

el matemático suizo Leonhard Euler resolvió este problema en 1973 (primera vez en que se utilizó por primera vez la teoría de grafos).

Circuitos y caminos de Euler

Un circuito Euleriano en un grafo G es un circuito simple que contiene cada arista de G.
Un camino Euleriano en G es un camino simple que contiene cada arista en G.

Circuitos de Euler (3)

Ejercicio: Cuales de los siguientes grafos tienen circuitos o caminos Eulerianos ?
(Nota: $V_G = V_H = V_F = \{a, b, c, d, e\}$)

- $E_F = \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{d, e\}, \{b, e\}\}$
- $E_G = \{\{a, b\}, \{b, e\}, \{a, e\}, \{e, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$
- $E_H = \{\{a, b\}, \{b, e\}, \{a, e\}, \{e, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{b, c\}, \{a, d\}\}$
- $V_I = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
  $E_I = \{(a, g), (g, c), (c, b), (b, g), (g, e), (e, d), (d, f), (f, a)\}$
- $V_J = \{a, b, c, d\}$
  $E_J = \{(a, b), (b, c), (c, a), (d, b), (c, d)\}$

Circuitos de Euler (4)

Teorema 1
Un multigrafo conexo tiene un circuito Euleriano si y solo si cada vértice tiene grado par.

Teorema 2
Un tiene un camino Euleriano pero no un circuito Euler si y solo si tiene exactamente 2 vértices de grado impar.

Contenido

Circuitos de Euler (5)

Algoritmo para la construcción de circuitos eulerianos

Procedimiento *Euler* (*G*: multigrafo conexo con todos los vertices de grado par

circuito = circuito en G que comienza en un vertice elegido arbitrariamente

H = grafo obtenido al eliminar de *G* las aristas de circuito

Mientras H tiene aristas

Inicio

subcircuito = un circuito en H que inicia en un vertice de circuito

H = grafo obtenido al eliminar de *G* las aristas de subcircuito y todos los vertices aislados

circuito = circuito con subcircuito insertado en el vertice apropiado

Fin (circuito es un circuito euleriano)

Circuitos de Euler (6)

Ejercicio: Existen circuitos Eulerianos en los siguientes grafos ?

- $V_G = \{a, b, c, d\}$
  $E_G = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{b, d\}\}$
- $V_H = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
  $E_H =$
  $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, a\}, \{b, g\},$
  $\{g, c\}, \{c, f\}, \{f, d\}\}$
- $V_F = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
  $E_F =$
  $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, a\}, \{a, g\}, \{b, g\},$
  $\{c, g\}, \{d, g\}, \{e, g\}, \{f, g\}\}$

R//: Solo los grafos G y H. Pues solo tienen 2 vértices de grado impar.

Circuitos de Euler (7)

Ejercicio: Es posible adaptar el algoritmo para construccion de circuitos eulerianos, para computar caminos eulerianos ?

R//: Sugerencia

1. Adicionar una arista entre los unicos vértices de grado impar.
2. Ejecutar el algoritmo para determinar el circuito euleriano (ya existente).
3. Del circuito euleriano obtenido, eliminar la arista adicionada.
4. Reconstruir el camino iniciando en uno de los vértices de grado impar.

Circuitos de Hamilton

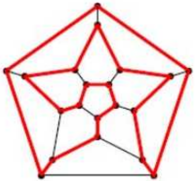

Figura: El juego de la vuelta al mundo de Hamilton

Reseña histórica: juego inventado por el matemático irlandés William Hamilton.
Dado un dodecaedro (poliedro de 12 caras, siendo cada una un pentágono regular) cuyos vértices se marcaron con 20 ciudades del mundo.
Es posible iniciar en una ciudad, visitar solo una vez cada una de las otras 19 ciudades, y regresar a la ciudad de origen ?

Circuitos de Hamilton (2)

circuito y camino de Hamilton

Un camino $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el grafo $G = (V, E)$ es llamado un camino Hamiltoniano si $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$.
Un circuito $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0$ (con n¿1) en un grafo $G = (V, E)$ es llamado un circuito Hamiltoniano si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ es un camino Hamiltoniano.

Ejercicio: Cuales de los siguientes grafos G, H, F tienen circuitos o caminos Hamiltonianos ?

- $V_G = \{a, b, c, d, e\}$
  $E_G = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}, \{a, c\}, \{b, e\}\}$
- $V_H = \{a, b, c, d\}$ $E_H = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}\}$
- $VF = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
  $E_F = \{\{a, b\}, \{b, g\}, \{g, e\}, \{e, f\}, \{e, c\}, \{c, d\}, \{b, c\}\}$

Circuitos de Hamilton (3)

- No se conocen condiciones necesarias y suficientes para la existencia de circuitos hamiltonianos.
- Si se conocen teoremas que dan condiciones suficientes para la existencia de circuitos hamiltonianos.
- Hay propiedades para demostrar que un grafo no contiene un circuito hamiltoniano (ej: grafo con vértice de grado 1).
- Un circuito hamiltoniano no puede contener un circuito mas pequeño dentro de él.
- Ideas:
  - Ambas aristas de un vértice de grado 2 tienen que formar parte del circuito hamiltoniano .
  - Al pasar por un vértice pueden descartarse todas las aristas incidentes con el que no sean las usadas en el circuito.

Circuitos de Hamilton (4)

Algunas condiciones suficientes para la existencia de circuitos hamiltonianos son:

Teorema de DIRAC

(Gabriel A. Dirac en 1952)
Sea G un grafo simple con n vértices con $n \geq 3$ tal que todos los vertices de G tienen grado mayor o igual que $n/2$. Entonces, G contiene un circuito hamiltoniano.

Teorema de ORE

(Oystein Ore en 1960)
Sea G un grafo simple con n vértices para $n \geq 3$ tal que $deg(u) + deg(v) \geq n$ para cada par de vértices no adyacentes u y v de G. Entonces, G contiene un circuito hamiltoniano.

Circuitos de Hamilton (5)

Ejercicio: Determinar si los siguientes grafos contienen circuitos hamiltonianos

- K_3 (grafo completo de 3 vértices)
- K_5
- K_n
- Q_2 (2-cubo)
- Q_3
- W_3 (rueda de 3 vértices)
- K_5