

# Introducción a la Teoría de Grafos

## 1. Grafos. Conceptos fundamentales

Un grafo  $G$  es un par  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito (vértices, nodos) y  $E$  es un multiconjunto de pares no ordenados de vértices, denotados por  $\{x, y\}$ , que se denominan lados, aristas, etc. En este caso decimos que  $x$  y  $y$  son extremos de  $\{x, y\}$ . Denotamos  $V(G)$  por el conjunto de vértices del grafo  $G$  y por  $E(G)$  el conjunto de lados del grafo  $G$ . Además  $\nu(G)$  y  $\varepsilon(G)$  denotan el número de vértices y el número de aristas de  $G$  respectivamente. Puesto que  $E$  es un multiconjunto es posible que existen pares repetidos, en este caso  $G$  tiene lados múltiples. También es posible que algún par no ordenado de  $E$  tenga el mismo vértice repetido, en este caso decimos que el lado es un lazo (loop) o bucle. Cuando existen lados múltiples y/o lazos decimos que  $G$  es un multigrafo. Si no hay lados múltiples ni lazos decimos que es un grafo simple. Un digrafo  $G$  es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto de vértices y  $E$  es un multiconjunto de pares *ordenados*. Los lados se denotan por pares ordenados,  $(u, v)$  denota el lado dirigido que tiene como vértice inicial a  $u$  y como vértice terminal a  $v$ .

A continuación damos unas definiciones que provienen del libro de Matemáticas Discreta y sus aplicaciones de Rosen [2]. Se deja al lector comparar las diferentes definiciones.

**Definición 1** *Un grafo simple  $G(V, E)$  consta de  $V$ , un conjunto no vacío de **vértices**, y de  $E$ , un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de  $V$ . A esos pares se les llama **aristas o lados**.*

**Ejercicio 1** *Muestre que si  $G$  es simple, entonces  $\varepsilon \leq \binom{\nu}{2}$ .*

En algunos casos los grafos simples no bastan para modelar ciertas situaciones en las cuales se requiere de la existencia de múltiples aristas entre par de vértices. En este caso no es suficiente definir las aristas como par de vértices; la definición de multigrafo es un poco más complicada.

**Definición 2** *Un multigrafo  $G(V, E)$  consta de un conjunto  $V$  de vértices, un conjunto  $E$  de aristas y una función  $f$  de  $E$  en  $\{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$ . Se dice que las aristas  $e_1, e_2$  son aristas **múltiples o paralelas** si  $f(e_1) = f(e_2)$ .*

Los multigrafos definidos no admiten **bucles** o **lazos** (aristas que conectan un vértice consigo mismo). Usamos en este caso, **pseudografos** que son más generales que los multigrafos.

**Definición 3** Un **pseudografo**  $G(V, E)$  consta de un conjunto  $V$  de vértices, un conjunto  $E$  de aristas y una función  $f$  de  $E$  en  $\{\{u, v\} | u, v \in V\}$ . Se dice que una arista  $e$  es un **bucle** o **lazo** si  $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$  para algún  $u \in V$ .

La diferencia entre grafo y digrafo es que el último tiene los lados dirigidos y se entiende como un grafo dirigido.

**Definición 4** Un **grafo dirigido** o **digrafo**  $G = (V, E)$  consta de un conjunto  $V$  de vértices, un conjunto  $E$  de aristas, que son pares ordenados de elementos de  $V$ .

Definimos los multigrafos dirigidos de la siguiente manera

**Definición 5** Un **multigrafo dirigido**  $G(V, E)$  consta de un conjunto  $V$  de vértices, un conjunto  $E$  de aristas y una función  $f$  de  $E$  en  $\{(u, v) | u, v \in V\}$ . Se dice que las aristas  $e_1, e_2$  son aristas **múltiples** o **paralelas** si  $f(e_1) = f(e_2)$ .

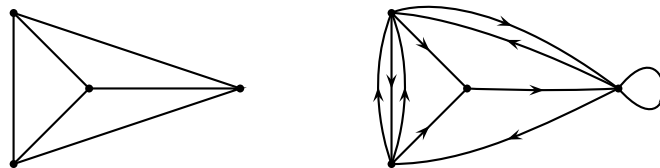


Figura 1: Ejemplos de grafo y multigrafo dirigido.

### 1.1. Adyacencia de Vértices, Incidencia de Aristas y Grado de los Vértices

Dos vértices  $u, v$  de un grafo  $G = (V, E)$  se dicen **adyacentes** si  $\{u, v\} \in E$ , asimismo dos aristas son adyacentes si tienen un mismo vértice como extremo; análogamente si  $e = \{u, v\}$  decimos que el lado  $e$  es **incidente** a los vértices  $u$  y  $v$ . El grado de un vértice es el número de lados incidentes a él. El grado de un vértice  $u$  se denota  $gr(u)$ . Denotamos con  $\delta(G)$  y  $\Delta(G)$  el mínimo y el máximo grado de los vértices de  $G$  respectivamente.

**Ejercicio 2** Si  $G$  es un grafo simple, muestre que  $\Delta \leq \nu - 1$  donde  $\nu$  es el número de vértices de  $G$ .

En un digrafo distinguimos entre grado entrante (indegree) y grado saliente (outdegree) de  $u$ , el primero indica el número de lados que tienen al vértice  $u$  como terminal y el segundo indica el número de lados que tiene al vértice  $u$  como inicial, y se denotan  $gr^-(u)$  y  $gr^+(u)$  respectivamente.

**Teorema 1** Pruebe que en un grafo la suma de los grados de los vértices es el doble del número de lados. Es decir, si  $G = (V, E)$  es el grafo, entonces

$$\sum_{u \in V} gr(u) = 2|E|$$

**Teorema 2** Si  $G = (V, E)$  es un digrafo, entonces

$$\sum_{u \in V} gr^-(u) = \sum_{u \in V} gr^+(u) = |E|$$

**Teorema 3** Pruebe que el número de vértices de grado impar es par.

**Ejercicio 3** Muestre que  $\delta \leq 2\varepsilon/\nu \leq \Delta$ .

**Ejercicio 4** El grafo arista de un grafo  $G$  es el grafo cuyo conjunto de vértices es  $E(G)$  en el cual dos vértices son adyacentes si y sólo si ellos son aristas adyacentes en  $G$ . Muestre que, si  $G$  es simple el grafo arista de  $G$  tiene  $\varepsilon(G)$  vértices y  $\sum_{u \in V(G)} \binom{gr(u)}{2}$  aristas.

## 1.2. Representaciones de los grafos

Sea  $G = (V, E)$  un grafo con  $\nu$  vértices y  $\varepsilon$  aristas, entonces le corresponde una matriz  $\nu \times \varepsilon$  denominada la **matriz de incidencia** de  $G$ . Si denotamos los vértices de  $G$  por  $v_1, v_2, \dots, v_\nu$  y las aristas por  $e_1, e_2, \dots, e_\varepsilon$ . Entonces la *matriz de incidencia* de  $G$  es la matriz  $\mathbf{M}(G) = [m_{ij}]$  donde  $m_{ij}$  es el número de veces que la arista  $e_j$  incide en el vértice  $v_i$ ; los valores son 0, 1 ó 2 (2 en el caso que la arista sea un lazo).

Otra matriz asociada a  $G$  es la **matriz de adyacencia**, esta es una matriz  $\nu \times \nu$   $\mathbf{A}(G)[a_{ij}]$ , en donde  $a_{ij}$  es el número de aristas que van de  $v_i$  hasta  $v_j$ . A continuación damos un ejemplo de un grafo con su correspondiente matriz de incidencia y matriz de adyacencia.

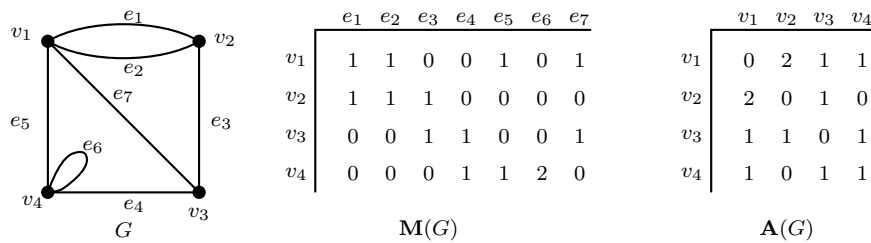


Figura 2: Matriz de Incidencia y de Adyacencia de  $G$

### 1.3. Caminos y Ciclos

En algunos textos, e.g. Bruualdi [1] se distingue entre cadenas (chains) y caminos (path), usando el primer término para grafos y el segundo para digrafos. Una sucesión alternada de vértices y lados  $u_1, e_1, u_2, e_2, \dots, e_k, u_{k+1}$  tal que  $e_i = [u_i, u_{i+1}]$  se denomina cadena en un grafo y camino en un digrafo. Los caminos deben realizarse de acuerdo a la dirección de los lados. Si no existen lados multiples podemos denotar sin ambigüedad la cadena como una sucesión de vértices (vértices consecutivos adyacentes). Una cadena es cerrada si el vértice inicial y final es el mismo. La cadena cerrada es un ciclo si todos los vértices (excepto los extremos) son distintos. El camino cerrado es un circuito si todos los vértices (excepto los extremos) son distintos.

**Teorema 4** *Si en un grafo  $G$  todos los vértices tiene grado mayor a 1, pruebe que existe un ciclo.*

**Ejercicio 5** *Muestre que si  $\delta \geq 2$ , entonces  $G$  contiene un ciclo.*

Decimos que la cadena (camino) es simple si no hay vértices repetidos en la sucesión. Decimos que la cadena (camino) es un recorrido (trayectoria) si no tiene lados repetidos.

**Ejercicio 6** *Pruebe que todo camino simple es un recorrido. De un ejemplo en un grafo de un recorrido que no es camino simple.*

La longitud de una cadena (camino) es el número de lados que hay en él. La distancia entre dos vértices distintos es igual a la longitud de la cadena más corta entre ellos, si no hay camino entre ellos la distancia no está definida y la distancia es cero si los vértices son iguales. El diámetro de un grafo es el máximo de las distancias entre cualesquiera par de vértices. Una cadena (camino)  $\alpha = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  es cerrada(o) si  $v_0 = v_n$

**Ejercicio 7** *Muestre que si  $G$  es simple y  $\delta \geq 2$ , entonces  $G$  contiene un ciclo de longitud al menos  $\delta + 1$ .*

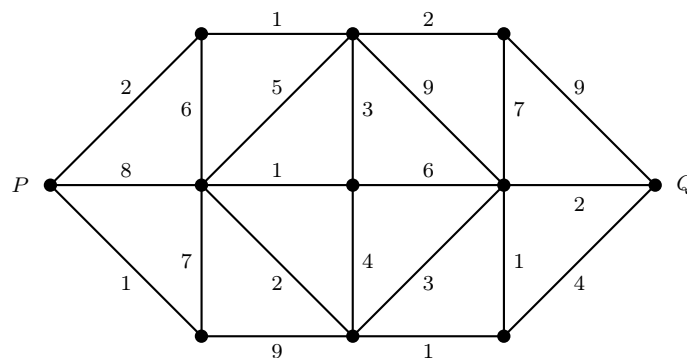
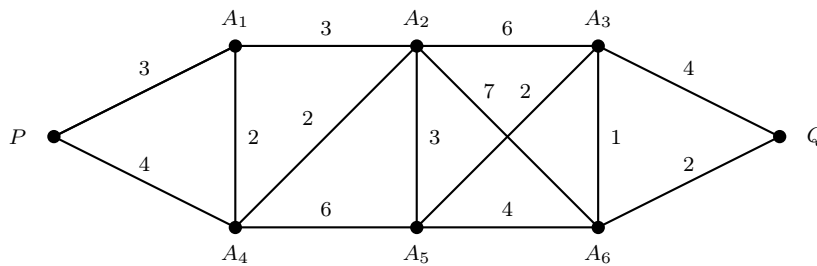
**Teorema 5** *Existe una cadena de  $u$  a  $v$  si y sólo si existe un camino simple de  $u$  a  $v$ .*

**Ejercicio 8** *Muestre que si  $G$  es simple y  $\delta \geq k$ , entonces  $G$  tiene un camino simple de longitud  $k$ .*

## 1.4. Grafos Etiquetados y Ponderados

Aunque ya hemos usado los grafos etiquetados, damos una definición en esta sección. Un grafo  $G$  es un **grafo etiquetado** si sus aristas y/o vértices tienen asignado alguna identificación. En particular,  $G$  es un **grafo ponderado** si a cada arista  $e$  de  $G$  se le asigna un número no negativo  $w(e)$  denominado **peso** o **longitud** de  $e$ . El **peso** (o **longitud** de un camino en un grafo ponderado  $G$  se define como la suma de los pesos de las aristas del camino. Un importante problema en teoría de grafos es encontrar el **camino más corto (liviano)**, esto es, el camino con el peso (longitud) mínimo entre dos vértices dados.

**Ejercicio 9** *Encontrar los caminos más cortos entre  $P$  y  $Q$*



## 1.5. Tipos de Grafos

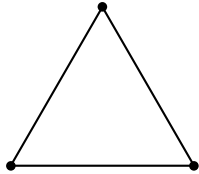
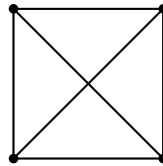
Hay varios tipos de grafos. En esta sección consideramos tres tipos de ellos, libre, completo, regular. Más adelante estudiamos los grafos bipartitos.

### Grafos Libres

Un grafo  $G = (V, E)$  se dice **libre** si  $E = \emptyset$ , es decir, si no tiene aristas.

### Grados Completos

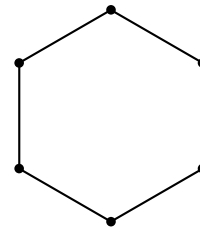
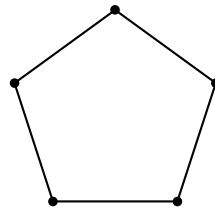
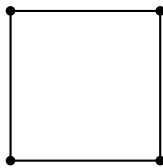
Un grafo simple  $G = (V, E)$  se dice **completo** si cada vértice está conectado a cualquier otro vértice en  $G$ . El grafo completo con  $n$  vértices se denota  $K_n$ .


 $K_3$ 

 $K_4$ 

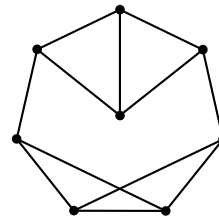
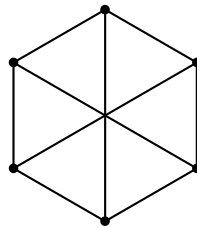
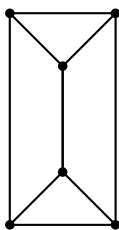
**Ejercicio 10** *Un grafo completo con  $n$  vértices tiene  $\binom{n}{2}$  aristas.*

### Grafos Regulares

Un grafo  $G = (V, E)$  es *regular de grado  $k$*  o  *$k$ -regular* si cada vértice tiene grado  $k$ ; es decir, un grafo es regular si todos los vértices tienen el mismo grado.



2-regulares



3-regulares

**Ejercicio 11** *Sea  $k$  impar. Pruebe que no existen grafos  $k$ -regulares con un número impar de vértices*

## 2. Isomorfismo de Grafos

**Definición 6** Los grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  son **isomorfos** si existe una función biyectiva  $f$  de  $V_1$  en  $V_2$  con la propiedad de que, para cada par de vértices  $u, v \in V_1$ ,  $u, v$  son adyacentes en  $G_1$  si y sólo si  $f(u), f(v)$  son adyacentes en  $G_2$ . Es decir  $\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$ . Si  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos lo denotamos  $G_1 \cong G_2$ .

Si dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos, tienen el mismo número de vértices, el mismo número de aristas, el mismo número de vértices de cualquier grado, el mismo número de ciclos de cualquier longitud, etc. Esto nos provee de algunos criterios para determinar si dos grafos no son isomorfos.

**Ejercicio 12** Pruebe que los grafos  $G$  y  $H$  dados son isomorfos.

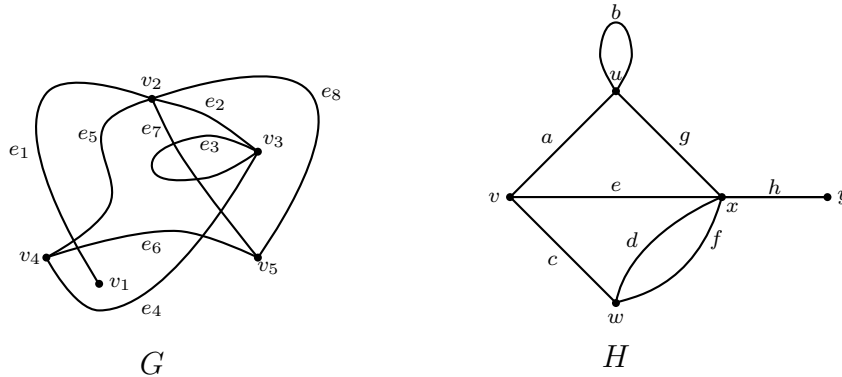


Figura 3: Diagramas de los grafos  $G$  y  $H$

### Ejercicio 13

1. Muestre que si  $G \cong H$ , entonces  $\nu(G) = \nu(H)$  y  $\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$ .
2. De un ejemplo en el cual el recíproco de la afirmación anterior es falso.
3. Muestre que hay once grafos simples no isomorfos de cuatro vértices.
4. Muestre que los siguientes grafos no son isomorfos

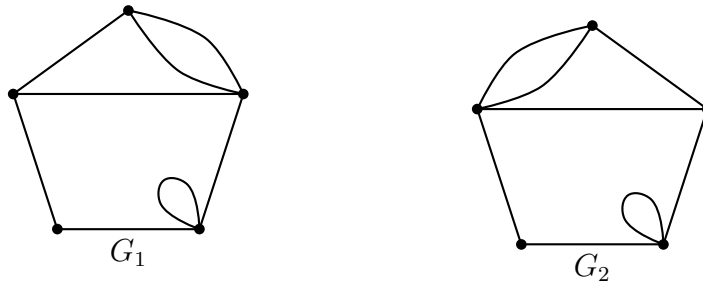


Figura 4: Diagramas de los grafos  $G_1$  y  $G_2$

**Ejercicio 14** *En los siguientes grafos diga si son isomorfos o no. Explique su respuesta*

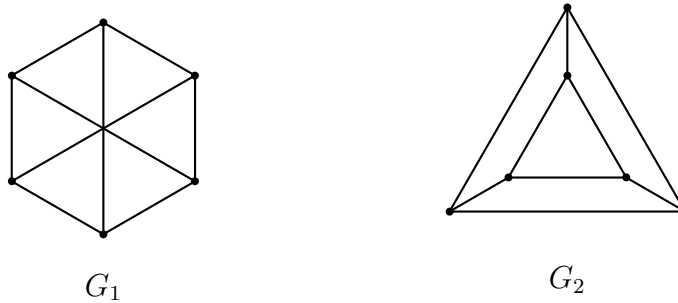


Figura 5: Diagramas de los grafos  $G_1$  y  $G_2$

**Ejercicio 15** *Muestre que los siguientes grafos son isomorfos*

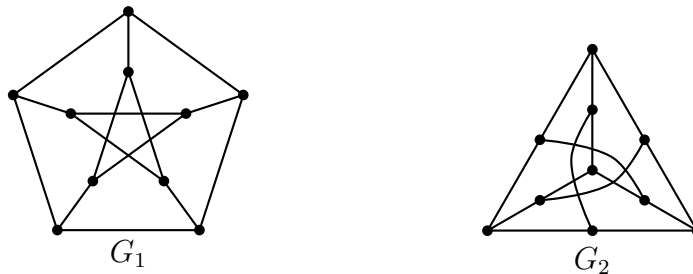


Figura 6: Diagramas de los grafos  $G_1$  y  $G_2$

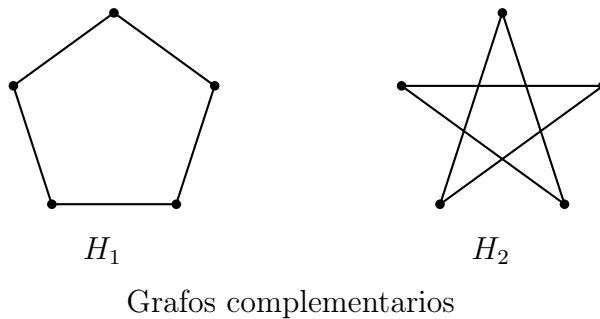
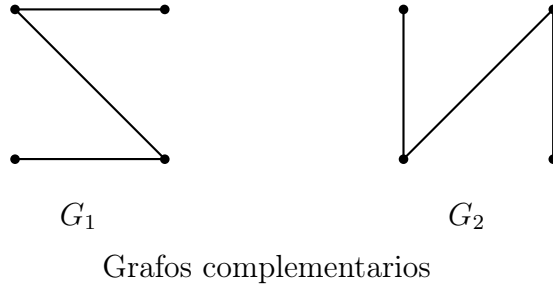
## 2.1. Grafos complementarios

Dado un grafo simple  $G = (V, E)$  el grafo complementario denotado por  $G^c$  es el grafo simple que tiene los mismos vértices y el conjunto de aristas



son todas aquellas que le faltan a  $G$  para que sea completo. De manera más formal, si  $\mathfrak{E} = \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$  es el conjunto de todas las aristas posibles y  $E^c = \mathfrak{E} \setminus E$  denota el complemento respecto a  $E$ , entonces  $G^c = (V, E^c)$ .

### Ejemplo 1



### Ejercicio 16

1. Describa los grafos  $K_n^c$  y  $K_{n,m}^c$ .
2. Hallar el grafo complementario de cada uno de los grafos 3-regulares dados arriba.

**Definición 7** Un grafo simple  $G$  se dice **auto-complementario** si  $G \cong G^c$ .

### Ejercicio 17

1. Muestre que si  $G$  es auto-complementario, entonces  $v \equiv 0, 1 \pmod{4}$ .
2. Hallar los grafos auto-complementarios con 4 y 5 vértices.

## 2.2. Subgrafos

Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Si  $H = (W, F)$  es un grafo tal que  $W \subseteq V$  y  $F \subseteq E$  decimos que  $H$  es un **subgrafo** de  $G$ . Si  $F$  contiene todos los lados de  $E$  que unen a los puntos de  $W$  en  $G$  se dice que  $H$  es un subgrafo completo de  $G$  generado por  $W$ . Si  $W = V$  decimos que  $H$  es un subgrafo extendido de  $G$  (spanning subgraph).

### Ejemplo 2

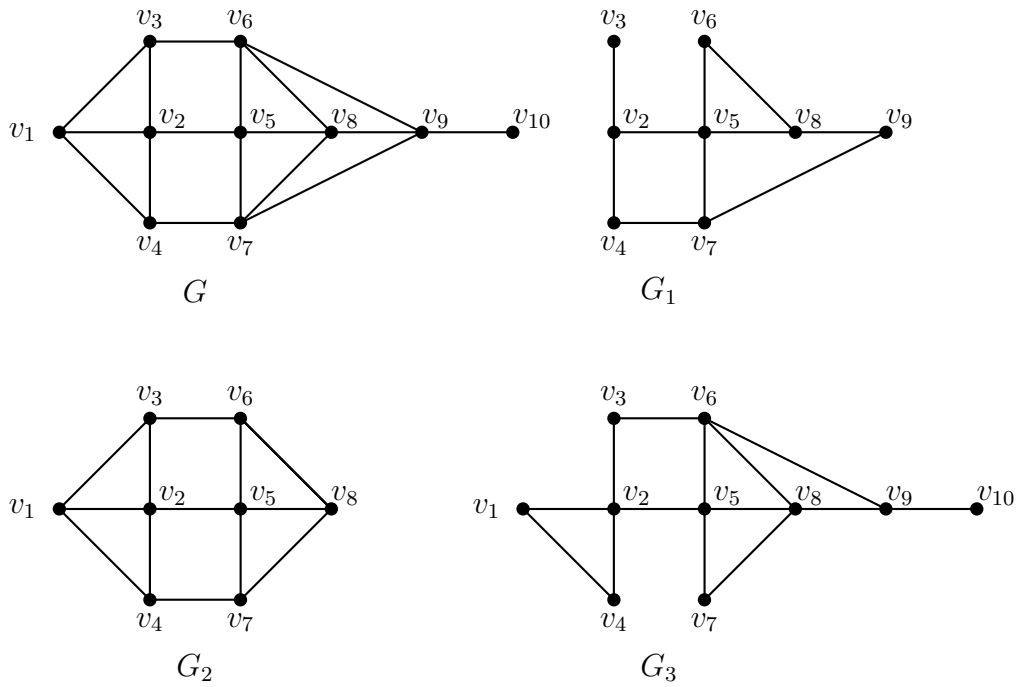


Figura 7: Subgrafos de  $G$

El grafo  $G_1$  es un subgrafo de  $G$ , el grafo  $G_2$  es un subgrafo completo de  $G$  y el grafo  $G_3$  es un subgrafo extendido de  $G$ .

## 2.3. Grafos Bipartitos

**Definición 8** Se dice que un grafo simple  $G = (V, E)$  es **bipartito** si el conjunto de vértices  $V$  se puede dividir en dos conjuntos disjuntos  $V_1, V_2$ , ( $V_1 \cup V_2 = V$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ), de tal manera que toda arista  $e \in E$  conecta un vértice de  $V_1$  con un vértice de  $V_2$ .

Esto significa que el subgrafo completo generado por  $V_1$  es libre de lados; asimismo el subgrafo completo generado por  $V_2$ .

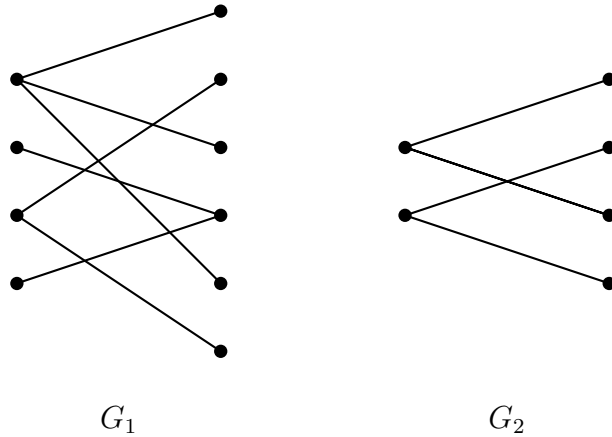


Figura 8: Grafos bipartitos

**Ejemplo 3** *Damos dos ejemplos de grafos bipartitos*

Un subgrafo bipartito se dice completo si cada vértice de  $V_1$  está conectado a todos los vértices de  $V_2$ ; si  $|V_1| = n$  y  $|V_2| = m$  este grafo se denota  $K_{m,n}$

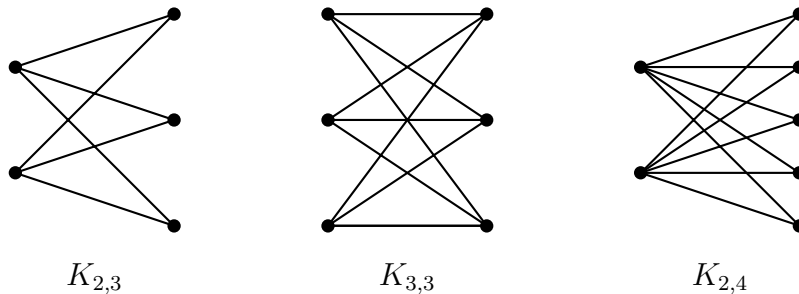


Figura 9: Grafos bipartitos completos

**2.4. Conexidad**

Un grafo (multigrafo, digrafo)  $G$  es **conexo** si existe una cadena (camino) entre cualesquiera par de vértices.

$H$  es una componente conexa de  $G$  si  $H$  es un subgrafo conexo completo maximal. Es decir no existe un subgrafo completo de  $G$  que contenga propiamente a  $H$  y sea conexo.

Definimos en  $G$  una relación sobre los vértices de esta manera:  $u \cong v$  si  $u = v$ , o existe una cadena que los une.

Pruebe que  $\cong$  es una relación de equivalencia.

Pruebe que cada clase de equivalencia es una componente conexa de  $G$ . Denotamos el número de componentes conexas de  $G$  con  $\omega(G)$ .

Sea  $G$  un grafo y  $v \in V(G)$  un vértice de  $G$ , se define  $G - v$  como el subgrafo de  $G$  que se obtiene al borrar el vértice  $v$  del grafo  $G$  y todos los lados incidentes a  $v$ .

**Definición 9** Si  $G$  es un grafo simple no trivial, entonces  $v$  es un **vértice de corte** si y sólo si  $\omega(G - v) > \omega(G)$ .

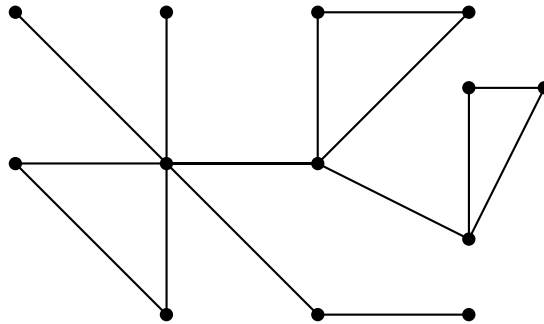
Sea  $G$  un grafo y  $e \in E(G)$  un lado de  $G$ , se define  $G - e$  como el subgrafo de  $G$  que se obtiene al borrar el lado  $e$  del grafo  $G$ . Así  $V(G) = V(G - e)$  y  $E(G - e) = E(G) \setminus \{e\}$ .

**Definición 10** Un lado  $e$  de un grafo  $G$  se dice que es **punte** si  $G - e$  tiene más componentes conexas que  $G$ .

### Ejercicio 18

Pruebe que si  $e$  es un puente, entonces  $\omega(G - e) = \omega(G) + 1$ .

**Ejercicio 19** Hallar los puentes en el siguiente grafo



$G$

**Teorema 6** Si  $G$  es conexo y  $e$  es un puente de  $G$ , pruebe que  $G - e$  tiene dos componentes conexas.

### Ejercicio 20

1. Muestre que si  $G$  es simple y  $\varepsilon > \binom{\nu-1}{2}$ , entonces  $G$  es conexo.

**Sugerencia:** Use la identidad

$$(s + t - 1)(s + t - 2) = s(s - 1) + t(t - 1) + 2(s - 1)(t - 1)$$

2. Para  $\nu > 1$ , encuentre un grafo simple desconexo  $G$  con  $\varepsilon = \binom{\nu-1}{2}$

### Ejercicio 21

1. Muestre que si  $G$  es simple y  $\delta > \lfloor \nu/2 \rfloor - 1$ , entonces  $G$  es conexo.  
 2. Encuentre un grafo simple  $\lfloor \nu/2 \rfloor - 1$ -regular desconexo para  $\nu$  par.

**Ejercicio 22** Muestre que si  $G$  es desconexo, entonces  $G^c$  es conexo.

Un multigrafo se dice que se puede recorrer si se puede dibujar sin roturas (levantar el lápiz) y usando cada lado exactamente una vez, es decir hay una cadena que pasa por todos los vértices y por todos los lados exactamente una vez. Esta cadena la denominamos un recorrido total.

**Teorema 7** Suponga que  $G$  se puede recorrer y que  $\gamma$  es un recorrido total que no empieza ni termina en el vértice  $u$ . Pruebe que el grado de  $u$  es par.

Un grafo (multigrafo) es *euleriano* si existe un recorrido total cerrado.

**Teorema 8** Un grafo finito conexo es euleriano si y sólo si cada vértice tiene grado par.

Pruebe que cualquier grafo conexo finito con dos vértices de grado impar tiene un recorrido total.

## 3. Grafos Planares

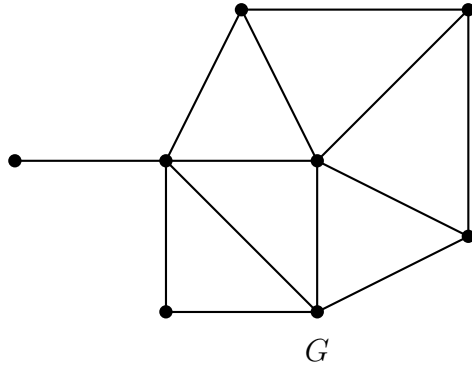
Decimos que un grafo  $G$  es planar si se puede dibujar en el plano sin que los lados se crucen fuera de sus extremos. Las regiones en una representación de un grafo planar, están limitadas por los lados. Dos puntos se encuentran en la misma región si existe una línea continua que los une sin cruzar ningún lado o vértice. El grado de una región es el número de lados que son frontera de dicha región; cuando un lado pertenece por completo a una región este lado aporta 2 al grado de la región

**Teorema 9 (Euler)** Si  $G$  es un grafo planar conexo, entonces cualquier representación planar de  $G$  tiene  $r = e - v + 2$  regiones donde  $e$  es el número de lados y  $v$  el número de vértices.

### Ejemplo 4

En este grafo  $G$ , el número de vértices  $v$  es 8, el número de aristas  $e$  es 13 y el número de regiones  $r$  es 7 y se verifica la fórmula de Euler para grafos planares conexos,

**Teorema 10** Si  $G$  es planar conexo con  $v \geq 3$ , entonces  $e \leq 3v - 6$



**Definición 11** Sea  $G$  un grafo, y  $u, v$  dos de sus vértices que forman arista. Entonces, una **subdivisión elemental** del grafo  $G$  es el grafo  $G'$  que es el grafo  $G$  al que se le añade un vértice  $w$ , se le quita la arista  $\{u, v\}$ , y se le añaden dos aristas, una la  $\{u, w\}$ , y otra la  $\{w, v\}$ . Es como sustituir una de sus aristas por un vértice unido a los vértices que antes eran extremos de esa arista. Una **subdivisión de  $G$**  es el grafo después de hacer un número finito (incluso 0) de subdivisiones elementales sucesivas.

**Teorema 11 (Kuratowski)** Un grafo  $G$  es planar si y sólo si no tiene subgrafos isomorfos a una subdivisión de  $K_5$  o de  $K_{3,3}$ .

## 4. Árboles

Un árbol  $T$  es un grafo en el cual cada par de vértices distintos está unidos por una única cadena simple.

### Ejemplo 5

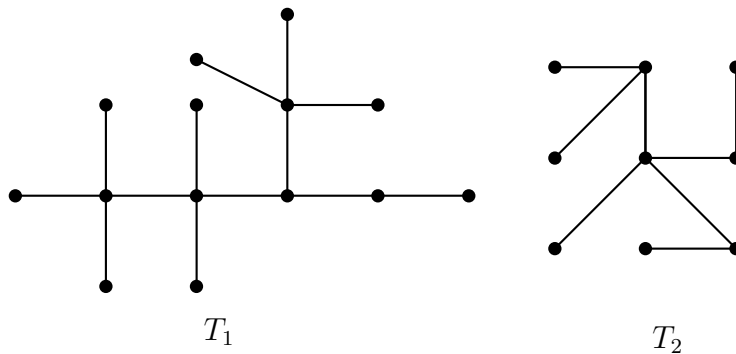
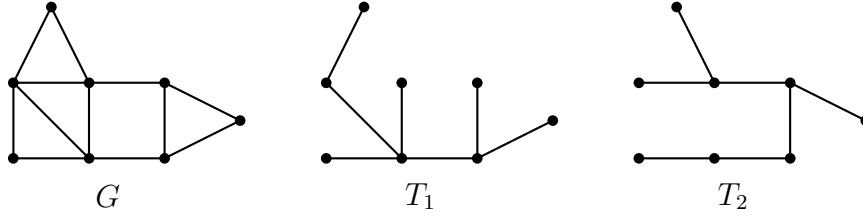


Figura 10:  $T_1$  y  $T_2$  árboles

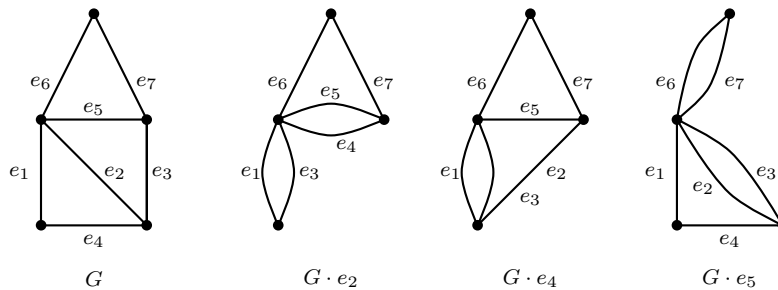
**Definición 12** Sea  $G$  un grafo, decimos que  $T$  es un árbol extendido (spanning tree) de  $G$  si es un subgrafo extendido (spanning subgraph) que es un árbol.

**Ejemplo 6**Figura 11: Algunos árboles extendidos de  $G$ **Ejercicio 23**

1. Encuentre los árboles extendidos del grafo dado arriba.
2. Encuentre todos los árboles no isomorfos de cuatro vértices.
3. Encuentre todos los árboles no isomorfos de cinco vértices.
4. Encuentre todos los árboles no isomorfos de seis vértices.

**Teorema 12**  $G$  es conexo si y sólo si existe un árbol extendido de  $G$ . Los árboles extendidos se obtiene borrando sucesivamente lados que formen ciclos. Al realizar este procedimiento rompiendo los ciclos que existen en  $G$  se llega a un árbol extendido.

Hay una fórmula recursiva simple y elegante para hallar el número de árboles extendidos de un grafo  $G$ . Tenemos que usar una operación sobre los grafos que es **la contracción de un lado**, la cual definimos a continuación. Un lado  $e$  de  $G$  se dice que es **contraído** si el es borrado y los extremos son identificados; el grafo resultante se denota por  $G \cdot e$ . Ilustramos con un ejemplo esta operación

**Ejemplo 7**

Si  $e$  es un lado de  $G$ , entonces:

$$\nu(G \cdot e) = \nu(G) - 1 \quad \varepsilon(G \cdot e) = \varepsilon(G) - 1 \quad \omega(G \cdot e) = \omega(G)$$

Verificarlo.

Concluir que si  $T$  es un árbol y  $e$  es un lado del árbol, entonces  $T \cdot e$  es un árbol.

Denotaremos el número de árboles extendidos de  $G$  por  $\tau(G)$ .

**Teorema 13** *Si  $e$  es un lado de  $G$ , entonces  $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$*

**Prueba.** Mostramos un esbozo de la prueba. Primero observe que podemos dividir los árboles extendidos de  $G$  en dos conjuntos disjuntos: los que tienen el lado  $e$  y los que no tienen el lado  $e$ . Existe una correspondencia biyectiva entre los árboles que contienen el lado  $e$  y los árboles extendidos del grafo  $G \cdot e$  (la biyección es  $T \rightarrow T \cdot e$ ). Mientras que todo árbol extendido de  $G$  que no contiene  $e$  es un árbol extendido de  $G - e$ . Usamos el principio de la suma.

### Ejercicio 24

1. Un grafo  $G$  es un árbol si y sólo si es conexo y sin ciclos.
2.  $G$  es un árbol si y sólo si es conexo y todos sus lados son puentes.
3. Si  $G$  es un árbol existen al menos un vértices colgantes (de grado uno).
4. Si  $T$  es un árbol de  $n$  vértices, entonces el número de lados es  $n - 1$ .
5. Si  $G$  es un árbol existen al menos dos vértices colgantes (de grado uno).
6. Un **bosque** es un grafo donde cada componente conexa es un árbol. Si un bosque tiene  $n$  vértices y  $k$  componentes ¿Cuántos lados tiene?
7. Si  $G$  tiene  $n$  vértices,  $n - 1$  lados y es conexo, entonces es un árbol.
8. Si  $G$  tiene  $n$  vértices,  $n - 1$  lados y no tiene ciclos, entonces es un árbol.

**Teorema 14** *Un vértice  $v$  de un árbol  $T$  es un vértice de corte de  $T$  si y sólo si  $gr(v) > 1$ .*

**Prueba.** Si  $gr(v) = 0$ , entonces  $T \cong K_1$  y es el grafo trivial y no es vértices de corte por la definición 9. Si  $gr(v) = 1$ , entonces  $T - v$  no tiene ciclos y tiene  $\nu(T) - 2$  aristas ya que tenía originalmente  $\nu(T) - 1$  aristas (por ser árbol) y se borró la arista incidente al vértice  $v$ . Pero  $\nu(T - v) = \nu(T) - 1$ , por lo tanto tiene  $\nu(T - v) - 1$  aristas; y del resultado anterior se tiene que  $T - v$  es un árbol y por lo tanto conexo. Es decir  $\omega(T) = \omega(T - v)$  y en consecuencia  $v$  no es vértice de corte de  $T$ .



Si  $gr(v) > 1$ , existen dos vértices distintos  $u, w$  adyacentes a  $v$ . El camino  $uvw$  es un camino entre  $u$  y  $w$  en  $T$ . Puesto que existe un sólo camino simple entre  $u$  y  $w$ , se sigue que no hay camino entre  $u$  y  $w$  en el grafo  $T - v$ . Por lo tanto  $u$  y  $w$  se encuentran en diferentes componentes conexas, es decir,  $\omega(T - v) > \omega(T)$ .

**Corolario 1** *Todo grafo simple conexo tiene al menos dos vértices que no son vértices de corte.*

**Prueba.** Sea  $G$  un grafo simple conexo. Por el teorema 12 existe un árbol extendido  $T$ ; como  $T$  tiene al menos dos vértices de grado 1, por el teorema anterior, estos vértices no son de corte. Sea  $v$  uno de esos vértices, entonces

$$\omega(T - v) = 1$$

Puesto que  $T$  es un árbol extendido de  $G$ ,  $T - v$  es un árbol extendido de  $G - e$  y en consecuencia

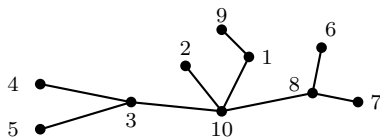
$$\omega(G - e) \leq \omega(T - e)$$

Se sigue que  $\omega(G - e) = 1$ , y de este modo  $v$  no es vértice de corte de  $G$ . Puesto que hay al menos dos vértices de este tipo la prueba termina.

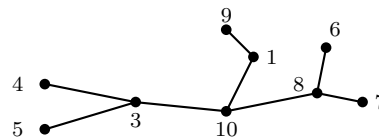
**Teorema 15 (Cayley 1889)** *Existen  $n^{n-2}$  árboles etiquetados distintos de  $n$  vértices (cada vértice con una etiqueta distinta).*

**Prueba.** Damos una prueba debida a Prüfer (1918).

Prüfer establece una biyección entre los árboles etiquetados de  $n$  vértices y unos códigos que denominamos códigos de Prüfer. Dado un árbol etiquetado  $V(T) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  construimos el código de Prüfer asociado de la siguiente manera: sea  $T_1 := T$  y  $b_1$  el vértice de grado 1 con el valor mínimo en su etiqueta de  $T_1$  y  $a_1$  el vértice adyacente, sea  $T_2$  el árbol que se obtiene al borrar el vértice  $b_1$  y el lado  $\{a_1, b_1\}$ . Repetimos el procedimiento sobre  $T_2$ , de esta manera obtenemos  $[a_1, a_2, \dots, a_{n-2}]$  el cual es el código del árbol  $T$ . Como un ejemplo sea Los vértices de grado 1 son 2, 4, 5, 6, 7, 9 y el de

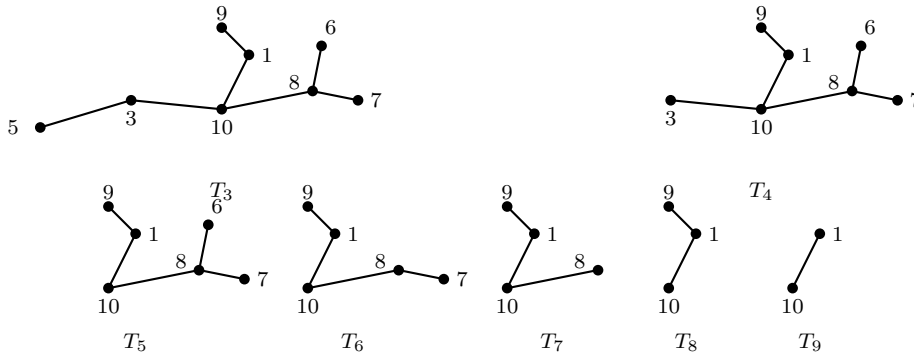


$T := T_1$



$T_2$

menor valor es 2. De este modo el primer valor del código es 10 que es la etiqueta del vértice que es adyacente al vértice 2 y obtenemos el árbol  $T_2$  al eliminar este vértice y su lado. En el siguiente el vértice de grado 1 con el menor valor es 4 y su vértice adyacente es el 3 que es el siguiente valor en el



código; obtenemos el árbol  $T_3$  al borrar el vértice 4 y su lado etc. El código que se obtiene a través de este proceso es  $[10, 3, 3, 10, 8, 8, 10, 1]$ .

Existe una biyección entre los árboles con vértices  $V(T) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  y códigos de la forma  $A = [a_1, a_2, \dots, a_{n-2}]$  donde  $a_i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Damos la manera de obtener un árbol a través de un código dado; el asunto consiste en construir los lados. Puesto que  $[n] \setminus [a_1, a_2, \dots, a_{n-2}] \neq \emptyset$ , procedemos a construir los lados de manera inductiva: sea  $b_1 = \min\{[n] \setminus [a_1, a_2, \dots, a_{n-2}]\}$ , entonces  $\{a_1, b_1\}$  es un lado del árbol  $T$  correspondiente al código  $A$ ; sea  $b_2 = \min\{[n] \setminus ([a_2, a_3, \dots, a_{n-2}] \cup \{b_1\})\}$ , el lado que se obtiene en este paso es  $\{a_2, b_2\}$ , en el paso  $i$   $b_i = \min\{[n] \setminus ([a_i, \dots, a_{n-2}] \cup \{b_1, \dots, b_{i-1}\})\}$ , se obtiene el lado  $\{a_i, b_i\}$  hasta que sólo quedan dos vértices que son adyacentes, y este es el último lado. Damos un ejemplo de como obtener un árbol por medio de su código de Prüfer. Sea  $V(T) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  y el código  $A = [3, 3, 1, 8, 8, 5, 3]$

$[9] \setminus A = \{2, 4, 6, 7, 9\}$ . El primer lado es  $\{3, 2\}$ .

$[9] \setminus [3, 1, 8, 8, 5, 3] \cup \{2\} = \{4, 6, 7, 9\}$ . El lado es  $\{3, 4\}$ .

$[9] \setminus [1, 8, 8, 5, 3] \cup \{2, 4\} = \{6, 7, 9\}$ . El lado es  $\{1, 6\}$ .

$[9] \setminus [8, 8, 5, 3] \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 7, 9\}$ . El lado es  $\{8, 1\}$ .

$[9] \setminus [8, 5, 3] \cup \{1, 2, 4, 6\} = \{7, 9\}$ . El lado es  $\{8, 7\}$ .

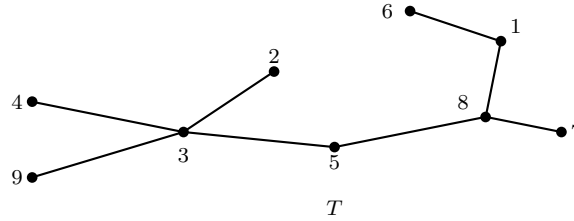
$[9] \setminus [5, 3] \cup \{1, 2, 4, 6, 7\} = \{8, 9\}$ . El lado es  $\{5, 8\}$ .

$[9] \setminus [3] \cup \{1, 2, 4, 6, 7, 8\} = \{5, 9\}$ . El lado es  $\{3, 5\}$ .

$[9] \setminus \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{3, 9\}$ . El lado es  $\{3, 9\}$ .

Luego el grafo correspondiente al código  $A = [3, 3, 1, 8, 8, 5, 3]$  es: Puesto que hay una biyección entre los árboles etiquetados con  $n$  vértices y los códigos  $[a_1, a_2, \dots, a_{n-2}]$ , donde  $a_i \in [n]$ ; y el número de códigos posibles es  $n^{n-2}$  (el número de funciones de  $[n-2]$  en  $[n]$ ), se concluye que hay  $n^{n-2}$  árboles etiquetados con  $n$  vértices.

Igualmente este número es el número de árboles extendidos de  $K_n$ .



## 5. Coloración de Grafos

Tenemos un grafo  $G$  y un conjunto de colores  $\mathcal{C} = \{a, b, \dots\}$ . Una coloración de  $G$  con los colores de  $\mathcal{C}$  es una asignación a los vértices de  $G$  de elementos de  $\mathcal{C}$  ("colores") de manera que los extremos de cada arista reciban colores distintos. Formalmente, una coloración de  $G$  con colores de  $\mathcal{C}$  es una aplicación

$$\gamma : V(G) \rightarrow \mathcal{C}$$

tal que si  $\{v, w\} \in E(G)$  entonces  $\gamma(v) \neq \gamma(w)$  **Observación.** En algunos libros estas coloraciones se denominan **coloraciones admisibles**; aquí, por comodidad, las denominamos coloraciones.

**Definición 13** *El número cromático de un grafo  $G$ ,  $\chi(G)$ , es el número mínimo de colores necesario para colorear  $G$ .*

Algunas observaciones inmediatas sobre el número cromático son las siguientes:

1. Para todo grafo  $G$ ,  $\chi(G) \leq |V|$ , porque siempre podremos colorear con  $|V|$  colores, asignando a cada vértice un color distinto. Ésta es, obviamente, la forma menos efectiva de colorear.
2. Si el grafo contiene al menos una arista, necesitaremos dos colores como mínimo; es decir, si  $|A| \geq 1$ , entonces  $\chi(G) \geq 2$ .
3. Si  $G$  contiene a  $G'$  como subgrafo, entonces

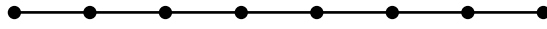
$$\chi(G) \geq \chi(G')$$

4. Si  $G$  tiene  $k$  componentes conexas,  $G_1, G_2, \dots, G_k$  que tienen números cromáticos  $\chi(G_1), \chi(G_2), \dots, \chi(G_k)$  respectivamente, entonces

$$\chi(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{\chi(G_i)\}$$

5. Si  $G$  y  $G'$  son isomorfos, entonces  $\chi(G) = \chi(G')$ .

### Ejemplo 8

Figura 12: Grafo lineal  $L_9$ 

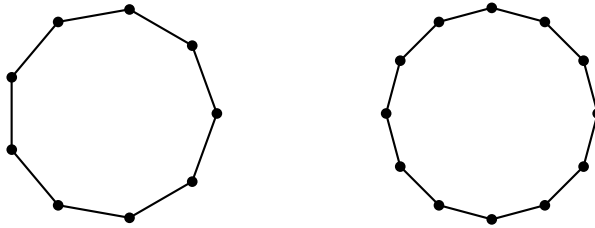
El grafo lineal de  $n$  vértices que denotamos  $L_n$  tiene número cromático 2, es decir  $\chi(L_n) = 2$ . Procedemos a dar una demostración por inducción. Puesto que para  $n \geq 2$  hay por lo menos una arista, se tiene por las observaciones dadas que  $\chi(L_n) \geq 2$ .  $L_2$  tiene como número cromático 2. Su pongamos que para todo  $k < n$  se verifica  $\chi(L_k) = 2$ . Sea  $e \in E(L_n)$  y sea  $L_n - e$  el subgrafo de  $L_n$  que se obtiene al borrar el lado  $e$ , el subgrafo  $L_n - e$  tiene dos componentes conexas que son grafos lineales  $L_s$  y  $L_t$  tal que  $s + t = n$  y  $1 \leq s, t < n$ ; por hipótesis inductiva  $L_s$  y  $L_t$  verifican  $\chi(L_s) = \chi(L_t) = 2$ . Si  $u$  y  $v$  son los extremos de  $e$ , entonces  $u$  y  $v$  pertenecen a componentes conexas distintas y ambos tienen grado 1. Usemos dos colores para colorear ambas componentes conexas  $L_s$  y  $L_t$  tal que  $u$  y  $v$  tengan colores distintos (esto siempre es posible); luego al agregar el lado  $e$  se obtiene una coloración de  $L_n$ .

Este argumento se puede usar para probar que todo árbol tiene número cromático 2, es decir,  $\chi(T_n) = 2$  siendo  $T_n$  un árbol de  $n$  vértices. ¡Hacerlo!

Consideremos los ciclos  $C_n$  que son todos los grafos isomorfos al grafo que tiene  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  como vértices y el conjunto de aristas es

$$E = \{\{v_i, v_{i+1}\} | i = 1, \dots, n - 1\} \cup \{v_n, v_1\}$$

Observe que se  $e$  es una arista de  $C_n$  entonces  $C_n - e = L_n$  y si  $v_1, v_n$  son los

Figura 13: Ciclos  $C_9$  y  $C_{12}$ 

vértices de grado 1 de  $L_n$  entonces el grafo que se obtiene de  $L_n$  al agregar el lado  $\{v_1, v_n\}$  es (isomorfo a)  $C_n$ ; además si se tiene una 2-coloración de  $L_n$  y  $n$  es par entonces los 2 vértices de grado 1 tienen colores distintos y si  $n$  es impar estos tienen la misma coloración. ¡Probarlo! Por lo tanto si  $n$  es par y  $L_n$  tiene una 2-coloración podemos agregar un lado que unan los vértices de grado 1 y se obtiene una 2-coloración de  $C_n$ . Esto es imposible si  $n$  es impar. Por esta razón son necesarios tres colores para colorear  $C_n$  si  $n$  es impar. En

conclusión

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Si  $G_1$  y  $G_2$  son grafos simples, definimos el grafo  $G_1 \times G_2$  como el grafo simple que se obtiene de  $G_1$  y  $G_2$  agregando todos los lados posibles entre los vértices de  $G_1$  y los vértices de  $G_2$ . De manera más formal:  $G_1 \times G_2$  es el grafo simple tal que

$$V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \dot{\cup} V(G_2)$$

y

$$E(G_1 \times G_2) = E(G_1) \dot{\cup} E(G_2) \dot{\cup} \{\{u, v\} | u \in G_1, v \in G_2\}$$

donde  $\dot{\cup}$  denota la unión disjunta.

El **grafo rueda**  $R_n$  se define  $R_n = C_n \times K_1$  donde  $K_1$  es el grafo simple con un vértice

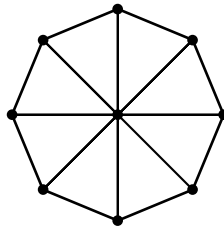


Figura 14: Grafo rueda  $R_8$

Verificar

$$\chi(R_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ es par} \\ 4 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

## 5.1. Relaciones con listas y particiones en bloques

Una coloración de un grafo  $G$  es equivalente a una lista con ciertas restricciones. Supongamos que  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , entonces una coloración usando los  $k$  colores  $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  es una lista ( $n$ -upla) con repetición  $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$  tal que si  $v_s$  y  $v_t$  son adyacentes entonces  $a_{i_s} \neq a_{i_t}$ .

Dada una coloración  $\gamma : V(G) \rightarrow \mathcal{C}$  definimos la relación entre los vértices de  $G$  de la siguiente manera:  $u \equiv_\gamma v$  si  $\gamma(u) = \gamma(v)$ , es decir, dos vértices están relacionados si tienen el mismo color. Esta es una relación de equivalencia (¡Verificarlo!). Esta relación induce una partición sobre el conjunto  $V(G)$

cuyos bloques son las clases de equivalencia. Cada bloque está constituido por vértices que tienen el mismo color. Es importante notar que los vértices que están relacionados *no* son adyacentes; si dos vértices son adyacentes se encuentran en bloques distintos.

Recíprocamente, si particionamos el conjunto de vértices de un grafo  $G$  de tal manera que vértices adyacentes se encuentran en bloques distintos, entonces esta partición induce una coloración de los vértices de  $G$ . Se colorean los vértices del mismo bloque con un mismo color y bloques distintos con colores distintos. Estas observaciones son útiles para resolver problemas. Como ejemplo, recordemos los grafos bipartitos. El conjunto de vértices se puede particionar en dos conjuntos  $V_1(G)$  y  $V_2(G)$  de tal manera que vértices adyacentes se encuentran en conjuntos distintos, así es posible usar dos colores para colorear los vértices de dicho grafo. A los vértices de  $V_1(G)$  se les asigna un color y a los vértices de  $V_2(G)$  se les asigna otro color, y resulta una coloración de  $G$ .

## 5.2. Algoritmo austero para colorear

Damos un procedimiento para colorear los vértices de un grafo siguiendo un orden impuesto a los vértices, usando la menor cantidad de colores posibles. Supongamos que  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots\}$  es el conjunto de colores; procedemos a describir el algoritmo que denominamos **algoritmo austero**<sup>1</sup> y consta de los siguientes pasos:

- **Paso inicial.** Ordenamos los vértices del grafo. Es importante notar que la eficiencia del algoritmo depende del orden que elijamos. Hacemos una lista de los vértices del grafo

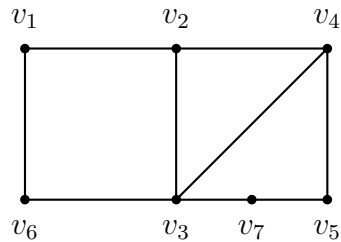
$$(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

- **Primer paso.** Le asignamos el primer color  $c_1$  al vértice  $v_1$ .
- **Segundo paso.** Procedemos a asignar un color al vértice  $v_2$  así: si es adyacente al vértice  $v_1$  le asignamos el siguiente color  $c_2$ , en otro caso le asignamos  $c_1$
- **$k$ -ésimo paso.** Para colorear el vértice  $v_k$  buscamos todos los vértices del conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$  que son adyacentes a  $v_k$  y determinamos los colores que han sido usados en sus coloraciones; luego usamos el primero disponible en el orden de  $\mathcal{C}$  que no haya sido usado en la coloración de los vértices adyacentes a  $v_k$ .

---

<sup>1</sup>En la literatura anglosajona se denomina **greedy algorithm**, que se podría traducir por algoritmo voraz, acaparador, avaricioso. . . Esta traducción trata de captar la filosofía del algoritmo, que supone elegir, en cada paso, la opción más económica, hasta conseguir la coloración completa.

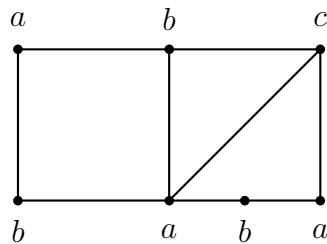
**Ejemplo 9** Consideremos el siguiente grafo con los vértices ordenados y  $C = \{a, b, c, \dots\}$



Usamos el algoritmo austero para asignar los colores:

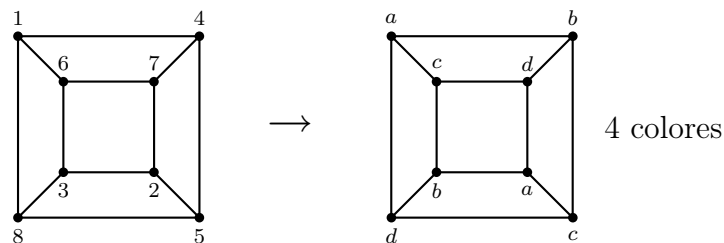
Al vértice  $v_1$  le asignamos el color  $a$ ; puesto que el vértice  $v_2$  es adyacente a  $v_1$  le asignamos el color  $b$ ; el vértice  $v_3$  es adyacente a  $v_2$  pero no es adyacente a  $v_1$ , de este modo le asignamos el color  $a$ ;  $v_4$  es adyacente a  $v_2$  y  $v_3$ , luego le asignamos el color  $c$ ;  $v_5$  le corresponde  $a$ ;  $v_6$  le corresponde  $b$  y a  $v_7$  le corresponde  $b$ .

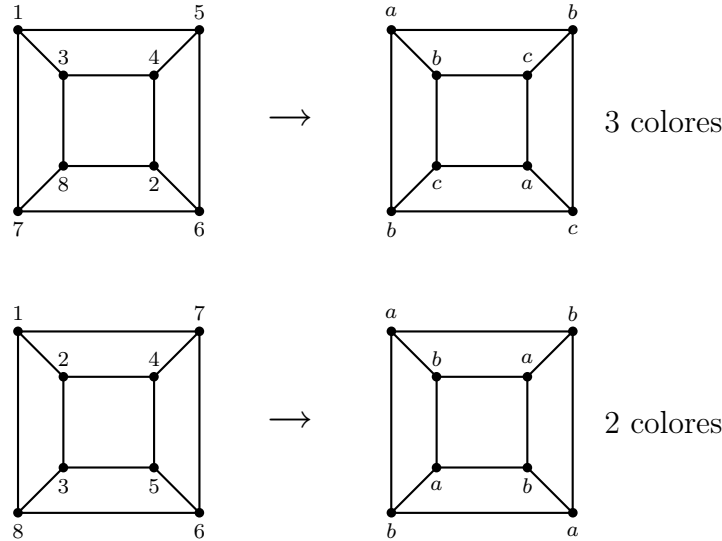
La coloración correspondiente siguiendo el algoritmo austero es



El número de colores usado es tres el cual es su número cromático. No siempre este algoritmo nos da una coloración donde el número de colores es igual al número cromático. Damos un ejemplo.

**Ejemplo 10** Consideremos el grafo del cubo  $Q_3$





Esta última coloración es la mejor. Hay dos cosas importantes, las coloraciones dependen del orden en que se elijan los vértices. La otra que no es tan evidente es que podemos determinar la peor coloración según  $\Delta(G)$  que es el máximo grado de los vértices de  $G$ . En el paso  $k$  del algoritmo lo peor que puede pasar es que todos los vértices adyacentes a  $v_k$  ya han sido coloreados con distintos colores, es decir, ya han sido usados  $gr(v_k)$  colores y para colorear  $v_k$  necesitamos  $gr(v_k) + 1$  colores. Podemos concluir que usando este algoritmo para colorear  $G$  el máximo número de colores no es mayor que  $\Delta(G) + 1$ . Resumimos en:

**Proposición 1** Sea  $G$  un grafo y  $\Delta(G)$  el máximo de los grados de los vértices de  $G$ , entonces el algoritmo austero usa a lo sumo  $\Delta(G) + 1$  colores. Por lo tanto

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Para conseguir un orden óptimo de los vértices para aplicar el algoritmo veamos la siguiente:

**Observación.** El número de colores prohibidos en el paso  $k$  es el número de colores usados por los vértices vecinos y anteriores:

$$\#\{\text{colores prohibidos}\} \leq \min\{\#\text{vecinos}, \#\text{anteriores}\} = \min\{\#\text{vecinos}, k - 1\}$$

Un buen orden debe minimizar los colores prohibidos: se deben colocar los vértices de mayor orden al principio. De todas maneras no hay un criterio establecido para construir dicho orden.

**Proposición 2** Si  $G$  es un grafo conexo con mayor grado  $\Delta(G)$ , pero en el que existe al menos un vértice  $u$  tal que  $gr(u) < \Delta(G)$ , entonces

$$\chi(G) < \Delta(G) + 1$$



**Prueba.** Damos una idea de la prueba y se deja al lector completar los detalles. El vértice  $u$  lo colocamos último en el orden, es decir,  $u = v_n$  si  $G$  tiene  $n$  vértices; si  $gr(u) = s < \Delta(G)$  los vértices adyacentes a  $u$  los enumeramos  $\{v_{n-s}, v_{n-s-1}, \dots, v_{n-1}\}$  luego consideramos los adyacentes a  $v_{n-1}$  que no han sido ordenados, y los de  $v_{n-2}$  y así hasta ordenarlos todos. Por ser  $G$  conexo, podemos ordenarlos todos. Todos los vértices tienen un vértice adyacente posterior (con subíndice mayor) excepto el vértice  $u$ . Luego el número de vértices adyacentes con subíndice menor es menor que  $\Delta(G)$ , y usando el algoritmo austero, en cada paso hay a lo sumo  $\Delta(G) - 1$  colores prohibidos. Para  $u$  el número de vértices adyacentes es menor que  $\Delta(G)$ . En cada paso hay a lo sumo  $\Delta(G) - 1$  colores prohibidos, por lo tanto se puede colorear con  $\Delta(G)$  colores.

Los siguientes ejercicios nos permitirán familiarizarnos con las particiones del conjunto de vértices correspondientes a coloraciones

### Ejercicio 25

1. Probar que en cualquier grafo  $G$  existe un orden sobre los vértices tal que el algoritmo austero de coloración usa  $\chi(G)$  colores.

**Sugerencia.** Halle una partición de los vértices en  $\chi(G)$  bloques y proceda a ordenar los vértices.

2. Pruebe que si  $G$  es un grafo con  $n$  vértices tal que todos sus vértices tienen grado  $k$ , entonces

$$\chi(G) \geq \frac{n}{n-k}$$

**Sugerencia.** Halle una partición de los vértices en  $\chi(G)$  bloques y determine cuál es el mayor número de vértices posibles en cada bloque.

3. Pruebe que  $\varepsilon(G) \geq \binom{\chi(G)}{2}$ .

**Sugerencia.** Halle una partición de los vértices en  $\chi(G)$  bloques y demuestre que para cada par de bloques existe sendos vértices que son adyacentes.

### Ejercicio 26 Sea $n$ el número de vértices de $G$ :

1. Probar que  $\chi(G)\chi(G^c) \geq n$ .

**Sugerencia.** Sean  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  y  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  coloraciones de  $G$  y  $G^c$  respectivamente, donde  $a_i$  es el color correspondiente al vértice  $v_i$  en el grafo  $G$  y  $b_i$  es el color correspondiente al vértice  $v_i$  en el grafo  $G^c$ . Pruebe que  $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$  es una coloración del grafo  $K_n$ .

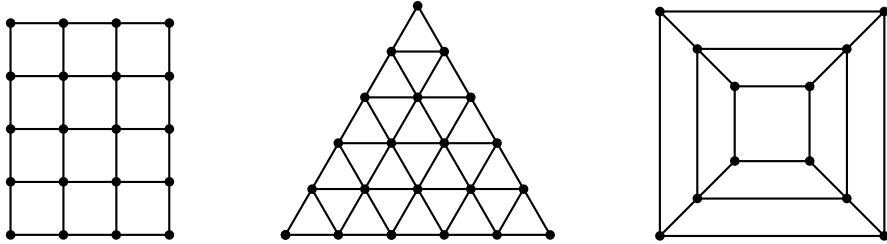
2. Probar que  $\chi(G) + \chi(G^c) \leq n + 1$ .

**Sugerencia.** Trate el caso extremo en el cual un bloque tiene el máximo posible de elementos, es decir, el resto de los bloques tiene el mínimo de elementos.

3. Probar que  $\chi(G) + \chi(G^c) \geq 2\sqrt{n}$ .

**Sugerencia.** Trate el caso extremo en el cual los bloques tiene la distribución más uniforme.

**Ejercicio 27** Hallar el número cromático de los siguientes grafos:



## 6. Ciclos de Hamilton

En la sección 2.4 tratamos el problema de los caminos y ciclos de Euler. En esta sección damos una breve introducción a los caminos y ciclos Hamiltonianos.

Un camino simple que contiene cada vértice de  $G$  se denomina **camino Hamiltoniano** de  $G$ ; análogamente, un **ciclo Hamiltoniano** de  $G$  es un ciclo que contiene todos los vértices de  $G$ . Tales caminos y ciclos son así llamados después que Hamilton (1856) describió, en una carta a su amigo Graves, un juego matemático sobre el dodecaedro en el cual una persona coloca cinco alfileres en cinco vértices consecutivos y a otra se le exige completar un camino simple hasta completar un ciclo. Un grafo es hamiltoniano

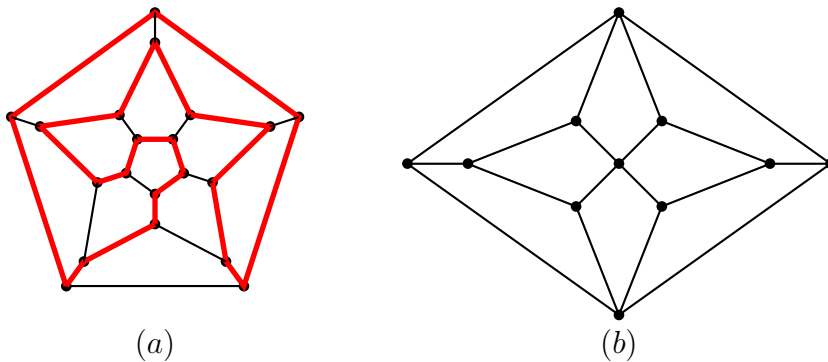


Figura 15: (a) El Dodecaedro; (b) El grafo Herschel

si contiene un ciclo Hamiltoniano. El dodecaedro es hamiltoniano; el grafo de Herschel no es hamiltoniano porque es bipartito y tienen un número impar de vértices.

**Lema 1** Sea  $C_n$  un ciclo con  $n$  vértices y sea  $S$  un subconjunto propio del conjunto de vértices de  $C_n$ . Entonces  $\omega(C_n - S) \leq |S|$ .

**Prueba.** Realizamos una prueba por inducción. Si  $S = \{v\}$  es un vértice se tiene que  $C_n - v \cong L_{n-1}$  donde  $L_n$  es el grafo lineal con  $n$  vértices, y por lo tanto  $\omega(C_n - v) = 1 = |S|$ ; supongamos que la afirmación vale para  $|S| = k$ . El grafo  $\omega(C_n - S)$  consta de componentes conexas que son grafos lineales; sea  $v$  un vértice de  $C_n$  tal que  $v \notin S$ , procedemos a eliminar  $v$  y analizamos los casos: si es de grado 1 el número de componentes conexas permanece (ver demostración del teorema 14), si el vértice tiene grado 0 el número de componentes conexas disminuye en 1 y si el vértice es de grado 2 el número de componentes conexas aumenta en uno; es decir  $\omega(C_n - S - v) \leq \omega(C_n - S) + 1$ . por hipótesis inductiva  $\omega(C_n - S) \leq |S|$ , en consecuencia

$$\omega(C_n - (S \cup \{v\})) \leq \omega(C_n - S) + 1 \leq |S| + 1 = |S \cup \{v\}|$$

Presentamos una condición necesaria simple, pero útil:

**Teorema 16** Si  $G$  es hamiltoniano, para cada subconjunto propio no vacío  $S$  de  $V$

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

**Prueba.** Supongamos que  $G$  es hamiltoniano con  $n$  vértices, entonces contiene un ciclo  $C_n$ . Puesto que  $V(G - S) = V(C_n - S)$  y  $E(C_n - S) \subset E(G - S)$  se tiene

$$\omega(G - S) \leq \omega(C_n - S)$$

Se aplica el lema anterior y se obtiene el resultado.

El teorema 16 se puede aplicar en algunos casos para determinar cuando un grafo *no* es hamiltoniano. Por ejemplo el grafo dado, al eliminar los

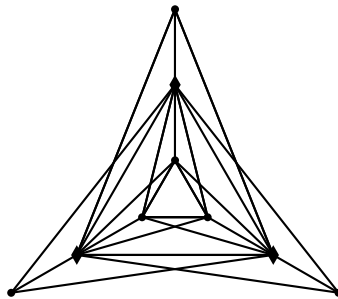


Figura 16:

vértices resaltados que son tres, se obtienen cuatro componentes conexas; de este modo el teorema nos asegura que no es hamiltoniano. Sin embargo, este método no siempre funciona; por ejemplo, el grafo de Peterson no es hamiltoniano, pero eso no se puede deducir del teorema 16. Veremos una condición

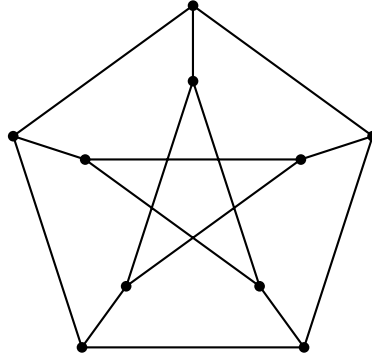


Figura 17: Grafo de Peterson

suficiente para que un grafo sea hamiltoniano; puesto que un grafo es hamiltoniano si y sólo si existe un subgrafo grafo simple que es hamiltoniano, es suficiente tratar con grafos simples. Tenemos un resultado de Dirac (1952).

**Teorema 17 (Dirac(1952))** *Si  $G$  es un grafo simple con  $\nu \geq 3$  y  $\delta \geq \nu/2$ , entonces  $G$  es hamiltoniano.*

Por contradicción. Supongamos que el teorema es falso, y sea  $G$  un grafo simple maximal no hamiltoniano con  $\nu \geq 3$  y  $\delta \geq \nu/2$ . Puesto que  $\nu \geq 3$   $G$  no es completo. Sean  $u, v$  vértices no adyacentes en  $G$ . Por ser  $G$  maximal se tiene que  $G + e$  con  $e = \{u, v\}$  es hamiltoniano. Además, puesto que  $G$  no es hamiltoniano, cada ciclo de Hamilton de  $G + e$  debe contener el lado  $e$ . Entonces existe un camino de Hamilton  $v_1 v_2 \dots v_\nu$  en  $G$  con origen en  $u = v_1$  y final en  $v_\nu$ . Definamos

$$S = \{v_i | \{u, v_{i+1}\} \in E\} \quad \text{y} \quad T = \{v_i | \{v_i, v\} \in E\}$$

$v = v_\nu \notin T$  porque no hay lazos y  $v = v_\nu \notin S$  pues  $v_{\nu+1}$  no existe  $\nu$  es el máximo subíndice. De este modo

$$|S \cup T| < \nu \quad (1)$$

Además

$$S \cap T = \emptyset \quad (2)$$

ya que si  $S \cap T$  contiene un vértice  $v_i$ ,  $i = 2, \dots, \nu - 1$ , entonces existe un ciclo de Hamilton  $v_1 v_2 \dots v_i v_\nu v_{\nu-1} \dots v_{i+1} v_1$  Usando (1) y (2) tenemos

$$gr(u) + gr(v) = |S| + |T| < \nu$$

Contradicción con  $\delta \geq \nu/2$ .

Bondy y Chvátal (1974) observaron que la prueba del teorema 17 puede ser modificada para obtener una condición suficiente más fuerte que la obtenida por Dirac.

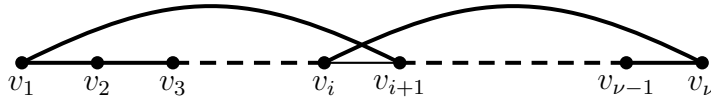


Figura 18:

**Corolario 2** Sea  $G$  un grafo simple y sean  $u$  y  $v$  vértices no adyacentes en  $G$  tales que

$$gr(u) + gr(v) \geq \nu \quad (3)$$

Entonces  $G$  es hamiltoniano si y sólo si  $G + \{u, v\}$  es hamiltoniano.

Un teorema debido a Ore tiene como corolarios el teorema de Dirac y el corolario de Bondy y Chvátal.

**Teorema 18 (Ore(1960))** Suponga que  $G$  es un grafo simple con  $\nu \geq 3$  y para cada par de vértices  $u \neq v$  que no son adyacentes, se verifica que

$$gr(u) + gr(v) \geq \nu$$

Entonces  $G$  es hamiltoniano.

La prueba es similar a la dada en el teorema de Dirac.

## Referencias

- [1] Richard A. Brualdi. INTRODUCTORY COMBINATORICS Elsevier North-Holland, 1977.
- [2] Kenneth H. Rosen. MATEMÁTICA DISCRETA Y SUS APLICACIONES McGraw-Hill, Quinta Edición. 2004.
- [3] J.A.Bundy U.S.R.Murty. GRAPH THEORY WITH APPLICATIONS North-Holland, 1976.
- [4] Fred S. Roberts. APPLIED COMBINATORICS Prentice-Hall, 1984.
- [5] S. Lipschutz M. Lipson DISCRETE MATHEMATICS. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, 1997.
- [6] Pablo Fernández Gallardo y José Luis Fernández Pérez. NOTAS DE MATEMÁTICA DISCRETA. Universidad Autónoma de Madrid. Versión Preliminar. Capitulo 8b. 2003