MATEMÁTICAS PARA LA COMPUTACIÓN
CAPÍTULO 4. LÓGICA MATEMÁTICA

RESPUESTA Y DESARROLLO DE EJERCICIOS

AUTOR: JOSÉ ALFREDO JIMÉNEZ MURILLO

4.1.-

a) Sean

p: Vivo en un lugar bajo.
q: Se inunda la casa.
r: Vivo en un lugar alto.
s: Me falta el agua.
t: Es zona cara.
u: Vivo en la montaña.

$[p \to q] \wedge [r \to (s \vee t)] \Rightarrow [(t' \wedge q' \wedge s) \to u]$

b) Sean

P: ESTÁ EN LA SELECCIÓN DE FUT BOL.

q: Es buen jugador.
r: Tiene una edad menor de 27 años.
s: Pertenece al América.
t: Es del Morelia.

$[p \leftrightarrow (q \wedge r \vee s)] \wedge [(p \wedge q' \vee s') \to t] \Rightarrow [t \to q]$

c) Sean

P: ESTUDIA INFORMÁTICA.

q: Estudia sistemas.
r: Es alumno del Tecnológico.
s: Es buen estudiante.

$[(p \vee q) \to r] \wedge [r \leftrightarrow s] \Rightarrow [[(q \vee p)' \wedge r'] \to s']$

d) Sean:

p: El programa corre.
q: Tiene errores de compilación.
r: Tiene errores de lógica.
s: El programa está bien.
t: Los resultados son satisfactorios.

$[p \leftrightarrow q'] \wedge [(r' \wedge q') \to (s \wedge t)] \Rightarrow [(q \vee r) \to (p' \wedge t')]$

e) Sean:

a: Se realiza un buen diseño de la base de datos.
b: Se hace buena programación.
c: Se accesa rápidamente la información.
d: Toma mucho tiempo corregir el programa.

$[(a \wedge b) \to c] \wedge [b' \to d] \Rightarrow [(c' \wedge d) \to a']$

4.3.-

a) $[(p \to q)' \to r] \to (p' \vee r' \wedge q)$

p	q	r	p'	q'	r'	$(r' \wedge q)$	$(p' \vee r' \wedge q)$	$(p \to q)'$	$(p \to q)' \to r$	$[(p \to q)' \to r] \to (p' \vee r' \wedge q)$
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0

b) $p \to q' \vee r \leftrightarrow p \wedge q \to r'$

p	q	r	p'	q'	r'	$p \wedge q$	$q' \vee r$	$p \to q' \vee r$	$p \to q' \vee r \leftrightarrow p \wedge q$	$p \to q' \vee r \leftrightarrow p \wedge q \to r'$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0

c) $(p \to r) \leftrightarrow [(q \vee r \wedge p') \to r']'$

p	q	r	p'	q'	r'	$r \wedge p'$	$(q \vee r \wedge p')$	$(p \to r)$	$[(q \vee r \wedge p') \to r']$	$[(q \vee r \wedge p') \to r']'$	F
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1

Donde $F = (p \to r) \leftrightarrow [(q \vee r \wedge p') \to r']$

d) $[(p \to q) \to r'] \wedge [(p' \vee r) \leftrightarrow q')$

P	q	r	p'	q'	r'	$(p \to q)$	$[(p \to q) \to r']$	$(p' \vee r)$	$(p' \vee r) \leftrightarrow q'$	$[(p \to q) \to r'] \wedge [(p' \vee r) \leftrightarrow q')]$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0

e) $p \to q \leftrightarrow r' \vee q' \to p' \wedge r$

p	q	r	p'	q'	r'	$p' \wedge r$	$r' \vee q'$	$p \to q$	$p \to q \leftrightarrow r' \vee q'$	$p \to q \leftrightarrow r' \vee q' \to p' \wedge r$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1

f) $[[((p \wedge r) \leftrightarrow q') \to p'] \to r']'$

p	q	r	p'	q'	r'	$p \wedge r$	$(p \wedge r) \leftrightarrow q'$	$((p \wedge r) \leftrightarrow q') \to p'$	$[((p \wedge r) \leftrightarrow q') \to p'] \to r'$	F
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1

Donde: $F=[[((p \wedge r) \leftrightarrow q') \to p'] \to r']'$

4.5.-

a)
$[(p \rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)] \equiv [(p\wedge q)\rightarrow r]$
$[(p\wedge q)\rightarrow(r\wedge r)] \equiv [(p\wedge q)\rightarrow r]$ por 9b
$[(p\wedge q)\rightarrow r] \equiv [(p\wedge q)\rightarrow r]$ por 21b

b)
$[p\vee (q\wedge r)] \equiv [(p\wedge p)\vee(p\wedge r)\vee(p\wedge q)\vee(q\wedge r)]$
$[p\vee (q\wedge r)] \equiv [p\vee (p\wedge q) \vee (p\wedge r) \vee(q\wedge r)]$ Por 21b y 18a
$[p\vee (q\wedge r)] \equiv [p\vee p\wedge(q\vee r) \vee(q\wedge r)]$ Por 20b
$[p\vee (q\wedge r)] \equiv [p\vee (q\wedge r)]$ Por 27e

4.7.-

p	q	r	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow r$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$	$p\rightarrow r$	$[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow(p\rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

4.9.-

a) $(q'\vee p') \wedge (r \wedge q) \Rightarrow (p \leftrightarrow r')$ Argumento válido (todos los casos es verdadero).
b) $(r\rightarrow p') \wedge (q' \vee r') \Rightarrow (p'\rightarrow q)$ Argumento no válido ya que cuando (p=0, q=0, r =0) y (p=0, q=0, r=1) el argumento es falso.
c) $(p'\rightarrow r) \wedge [(p' \rightarrow r) \rightarrow (q'\wedge p)] \Rightarrow (q'\wedge p)$ Argumento válido

4.11.- Sean:

p: Tengo mucho dinero.
q: Estoy muy carita.
r: Las muchachas me quieren.
s: Todas quieren salir conmigo.

Por lo tanto las hipótesis son:

$(p \vee q) \rightarrow r$	Hipótesis
s’	Hipótesis
$r \rightarrow s$	Hipótesis
p’	Conclusión

El teorema queda como sigue:
$[(p \vee q) \rightarrow r] \wedge s' \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow p'$

Demostración por el método directo, del siguiente teorema.

1.-	$(p \vee q) \rightarrow r$	Hipótesis
2.-	s’	Hipótesis
3.-	$r \rightarrow s$	Hipótesis
4.-	r’	3,2; Modus Tollens; 16
5.-	$p \rightarrow (p \vee q)$	Adición; 1
6.-	$p \rightarrow r$	5,1; Silogismo hipotético; 13
7.-	p’	6,4; Modus Tollens; 16

Demostración por Contradicción, del teorema.
$[(p \vee q) \rightarrow r] \wedge s' \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow p'$

1.-	$(p \vee q) \rightarrow r$	Hipótesis
2.-	s’	Hipótesis
3.-	$r \rightarrow s$	Hipótesis
4.-	p	Negación de la conclusión
5.-	$p \rightarrow (p \vee q)$	Adición; 1
6.-	$p \rightarrow r$	5,1; Silogismo hipotético; 13
7.-	r	4,6; Modus ponens; 15
8.-	r’	3,2; Modus Tollens; 16
9.-	$r \wedge r'$	7,8; Conjunción; 14
10.-	0	9; Contradicción; 26a

4.13.- Sean:

p: Se ha realizado un buen diseño de la base de datos.
q: Se hace buena programación.
r: Se accesa rápidamente la información.
s: Toma poco tiempo corregir el programa.

$(p \wedge q) \rightarrow r$ Hipótesis
$q' \rightarrow s'$ Hipótesis
$(r' \wedge s) \rightarrow p'$ Conclusión

Por lo tanto el teorema queda integrado de la siguiente manera:

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [q' \rightarrow s'] \Rightarrow [(r' \wedge s) \rightarrow p']$

Demostración por el método directo.

1.-	$(p \wedge q) \rightarrow r$	Hipótesis
2.-	$q' \rightarrow s'$	Hipótesis
3.-	$r' \rightarrow (p \wedge q)'$	1; Contrapositiva; 23
4.-	$r' \rightarrow (p' \vee q')$	3; Ley de Morgan; 22b
5.-	$s \rightarrow q$	2; Contrapositiva; 23
6.-	$[r' \rightarrow (p' \vee q')] \wedge [s \rightarrow q]$	4,5; Conjunción; 14
7.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [(p' \vee q') \wedge q]$	6; Dilema constructivo; 9b
8.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [q \wedge (p' \vee q')]$	7; Ley conmutativa; 18b
9.-	$(R' \wedge S) \rightarrow [(Q \wedge P') \vee (Q \wedge Q')]$	8; Ley distributiva; 20b
10.-	$(R' \wedge S) \rightarrow [(Q \wedge P') \vee 0]$	9; Contradicción; 26
11.-	$(R' \wedge S) \rightarrow (Q \wedge P')$	10; Ley de identidad; 27a
12.-	$(R' \wedge S) \rightarrow (P' \wedge Q)$	11; Ley conmutativa; 18b
13.-	$(P' \wedge Q) \rightarrow P'$	Simplificación; 2
14.-	$(R' \wedge S) \rightarrow P'$	12,13; Silogismo hipotético; 13

Demostración por contradicción del teorema:

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [q' \rightarrow s'] \Rightarrow [(r' \wedge s) \rightarrow p']$

1.-	$(p \wedge q) \rightarrow r$	Hipótesis
2.-	$q' \rightarrow s'$	Hipótesis
3.-	$[(r' \wedge s) \rightarrow p']'$	Negación de la conclusión.
4.-	$[[(r' \wedge s) \wedge p]']'$	3; Implicación; 24b
5.-	$(r' \wedge s) \wedge p$	4; Doble negación; 17
6.-	$(r' \wedge s)$	5; Simplificación; 11
7.-	p	5; Simplificación; 11
8.-	$r' \rightarrow (p \wedge q)'$	1; Contrapositiva; 23
9.-	$s \rightarrow q$	2; Contrapositiva; 23

10.-	$[r' \rightarrow (p \wedge q)'] \wedge [s \rightarrow q]$	8,9; Conjunción; 14
11.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [(p \wedge q)' \wedge q]$	10; Dilema constructivo; 9b
12.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [q \wedge (p \wedge q)']$	11; Ley conmutativa; 18b
13.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [q \wedge (p' \vee q')]$	12; Ley de Morgan; 22b
14.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [(q \wedge p') \vee (q \wedge q')]$	13; Ley distributiva; 20b
15.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [(q \wedge p') \vee 0]$	14; Contradicción; 26
16.-	$(r' \wedge s) \rightarrow (q \wedge p')$	15; Ley de identidad; 27a
17.-	$(q \wedge p')$	6,16; Modus ponens; 15
18.-	p'	17; Simplificación; 11
19.-	$p \wedge p'$	7,18; Conjunción; 14
20.-	0	19; Contradicción; 26

4.15.-

a) Demostración por el método directo del teorema:

$$[(r \vee q) \rightarrow q'] \wedge [p' \rightarrow r] \wedge (q \vee r) \wedge [q \rightarrow p] \Rightarrow [q' \wedge [p' \rightarrow (q' \wedge r)]]$$

Demostración

1.-	$(r \vee q) \rightarrow q'$	Hipótesis
2.-	$p' \rightarrow r$	Hipótesis
3.-	$(q \vee r)$	Hipótesis
4.-	$[q \rightarrow p]$	Hipótesis
5.-	$q \rightarrow (r \vee q)'$	1; Contrapositiva; 23
6.-	$(r \vee q)$	3; Ley conmutativa; 18a
7.-	q'	5,6; Modus tollens; 16
8.-	$p' \rightarrow q'$	4; Contrapositiva; 23
9.-	$[p' \rightarrow q'] \wedge [p' \rightarrow r]$	8,2; Conjunción; 14
10.-	$(p' \wedge p') \rightarrow (q' \wedge r)$	9; Dilema constructivo; 9b
11.-	$p' \rightarrow (q' \wedge r)$	10; Ley de idempotencia; 21b
12.-	$q' \wedge [p' \rightarrow (q' \wedge r)]$	7,11; Conjunción; 14

b) Demostración por el método directo del teorema:

$$[q \rightarrow (p \wedge s)] \wedge [s' \rightarrow r] \Rightarrow [(s' \wedge p' \vee s') \rightarrow (r \wedge q')]$$

Demostración

1.-	$q \rightarrow (p \wedge s)$	Hipótesis
2.-	$s' \rightarrow r$	Hipótesis
3.-	$(p \wedge s)' \rightarrow q'$	1; Contrapositiva; 23
4.-	$(p' \vee s') \rightarrow q'$	3; Ley de Morgan; 22b
5.-	$[s' \rightarrow r] \wedge [(p' \vee s') \rightarrow q']$	2,4; Conjunción; 14
6.-	$[s' \wedge (p' \vee s')] \rightarrow (r \wedge q')$	5; Dilema constructivo; 9b
7.-	$[(s' \wedge p') \vee (s' \wedge s')] \rightarrow (r \wedge q')$	6; Ley distributiva; 20b
8.-	$[(s' \wedge p') \vee s'] \rightarrow (r \wedge q')$	7; Ley de idempotencia; 21b

c) Demostración por el método directo del teorema:
$[(q \vee r') \rightarrow s] \wedge [t \rightarrow q'] \Rightarrow [(q \vee s') \rightarrow (t' \vee r)]$

Demostración

1.-	$(q \vee r') \rightarrow s$	Hipótesis
2.-	$t \rightarrow q'$	Hipótesis
3.-	$r' \rightarrow (r' \vee q)$	Adición
4.-	$r' \rightarrow (q \vee r')$	3; Ley conmutativa; 18a
5.-	$r' \rightarrow s$	4,1; Silogismo hipotético; 13
6.-	$[t \rightarrow q'] \wedge [r' \rightarrow s]$	2,5; Conjunción; 14
7.-	$(t \wedge r') \rightarrow (q' \wedge s)$	6; Dilema constructivo; 9b
8.-	$(q' \wedge s)' \rightarrow (t \wedge r')'$	7; Contrapositiva; 23
9.-	$(q \vee s') \rightarrow (t' \vee r)$	8; Ley de morgan; 22b

d) Demostración por el método directo del teorema:
$[q \wedge r] \wedge [p \rightarrow q'] \wedge [s \rightarrow (q\rightarrow r')] \Rightarrow [s' \wedge (q \rightarrow p')]$

Demostración

1.-	$(q \wedge r)$	Hipótesis
2.-	$p \rightarrow q'$	Hipótesis
3.-	$s \rightarrow (q\rightarrow r')$	Hipótesis
4.-	$q \rightarrow p'$	2; Contrapositiva; 23
5.-	$(q \rightarrow r')'$	1; Implicación; 24d
6.-	s'	3,5; Modus tollens; 16
7.-	$s' \wedge (q \rightarrow p')$	6,4; Conjunción; 14

e) Demostración por el método directo del teorema:
$[(q \vee s) \rightarrow t] \wedge t' \Rightarrow [(q' \wedge t') \wedge (q \rightarrow t)]$

Demostración

1.-	$(q \vee s) \rightarrow t$	Hipótesis
2.-	t'	Hipótesis
3.-	$(q \vee s)'$	1,2; Modus tollens; 16
4.-	$(q' \wedge s')$	3; ley de Morgan; 22a
5.-	q'	5; Simplificación; 11
6.-	$q' \wedge t'$	5,2; Conjunción; 14
7.-	$q \rightarrow (q \vee s)$	Adición; 1
8.-	$q \rightarrow t$	7,1; Silogismo hipotético; 13
9.-	$(q' \wedge t') \wedge (q \rightarrow t)$	6,8; Conjunción; 14

f) Demostración por el método directo del siguiente teorema:
$[\ p \leftrightarrow q'\ ] \wedge [p' \rightarrow r\ ] \Rightarrow\ [p' \rightarrow (q \vee r)\ ]$

Demostración

1.-	$p \leftrightarrow q'$	Hipótesis
2.-	$p' \rightarrow r$	Hipótesis
3.-	$[p \rightarrow q'\ ] \wedge [q' \rightarrow p]$	1; Equivalencia; 25
4.-	$q' \rightarrow p$	3; Simplificación; 11
5.-	$r' \rightarrow p$	2; Contrapositiva; 23
6.-	$[q' \rightarrow p\ ] \wedge [r' \rightarrow p\ ]$	4,5; Conjunción; 14
7.-	$(q' \wedge r'\ ) \rightarrow (p \wedge p)$	6; Dilema constructivo; 9b
8.-	$(q' \wedge r'\ ) \rightarrow p$	7; Ley de idempotencia; 21b
9.-	$(q \vee r\ )' \rightarrow p$	8; Ley de Morgan; 22a
10.-	$p' \rightarrow (q \vee r\ )$	9; Contrapositiva; 23

g) Demostración por el método directo del siguiente teorema.
$[\ (p \wedge r\ ) \rightarrow q\ ] \wedge\ [r' \rightarrow p\ ] \wedge [p \wedge r'\ ]' \Rightarrow [r \vee q]$

Demostración.

1.-	$(p \wedge r\ ) \rightarrow q$	Hipótesis
2.-	$r' \rightarrow p$	Hipótesis
3.-	$(p \wedge r'\ )'$	Hipótesis
4.-	$q' \rightarrow (p \wedge r\ )'$	1; Contrapositiva; 23
5.-	$q' \rightarrow (p' \vee r'\ )$	4; Ley de Morgan; 22b
6.-	$[r' \rightarrow p\ ] \wedge [q' \rightarrow (p' \vee r'\ )\ ]$	2,5; Conjunción; 14
7.-	$[r' \wedge q'\ ] \rightarrow [p \wedge (p' \vee r'\ )\ ]$	6; Dilema constructivo; 9b
8.-	$[r' \wedge q'\ ] \rightarrow [(p \wedge p') \vee (p \wedge r'\ )\ ]$	7; Ley distributiva; 20b
9.-	$[r' \wedge q'\ ] \rightarrow [\ 0 \vee (p \wedge r'\ )\ ]$	8; Contradicción; 26
10.-	$[r' \wedge q'\ ] \rightarrow [p \wedge r'\ ]$	9; Ley de identidad; 27a
11.-	$[r' \wedge q'\ ]'$	10,3; Modus tollens; 16
12.-	$r'' \vee q''$	11; Ley de Morgan; 22b
13.-	$r \vee q$	12; Doble negación; 17

4.17.-

a) Primera.

Demostración por el método directo del teorema:

$[(p\vee q)\rightarrow r] \wedge [r \rightarrow s] \Rightarrow [s' \rightarrow q']$

Demostración

1.-	$(p\vee q)\rightarrow r$	Hipótesis
2.-	$r \rightarrow s$	Hipótesis
3.-	$q \rightarrow (q\vee p)$	Adición; 1
4.-	$q \rightarrow (p\vee q)$	1; Ley conmutativa; 18a
5.-	$q\rightarrow r$	4,1; Silogismo hipotético; 13
6.-	$q\rightarrow s$	5,1; Silogismo hipotético; 13
7.-	$s' \rightarrow q'$	6; Contrapositiva; 23

Otra manera de resolver el mismo problema es:

$[(p\vee q)\rightarrow r] \wedge [r \rightarrow s] \Rightarrow [s' \rightarrow q']$

Demostración

1.-	$(p\vee q)\rightarrow r$	Hipótesis
2.-	$r \rightarrow s$	Hipótesis
3.-	$r' \rightarrow (p\vee q)'$	1; Contrapositiva; 23
4.-	$r' \rightarrow (p'\wedge q')$	3; Ley de Morgan; 22a
5.-	$s'\rightarrow r'$	2; Contrapositiva; 23
6.-	$s'\rightarrow (p'\wedge q')$	5,3; Silogismo hipotético; 13
7.-	$(q'\wedge p') \rightarrow q'$	Simplificación; 2
8.-	$(p'\wedge q') \rightarrow q'$	7; Ley conmutativa; 18b
9.-	$s' \rightarrow q'$	6,8; Silogismo hipotético; 13

Demostración por contradicción del teorema:

$[(p\vee q)\rightarrow r] \wedge [r \rightarrow s] \Rightarrow [s' \rightarrow q']$

Demostración

1.-	$(p\vee q)\rightarrow r$	Hipótesis
2.-	$r \rightarrow s$	Hipótesis
3.-	$[s' \rightarrow q']'$	Negación de la conclusión.
4.-	$[[s' \wedge q]']'$	3; Implicación; 8b
5.-	$s' \wedge q$	4; Doble negación; 17
6.-	s'	5; Simplificación; 11
7.-	q	5; Simplificación; 11
8.-	$(p \vee q) \rightarrow s$	1,2; Silogismo hipotético; 13
9.-	$s' \rightarrow (p \vee q)'$	8; Contrapositiva; 23
10.-	$s'\rightarrow (p'\wedge q')$	9; Ley de Morgan; 22a
11.-	$(q'\wedge p') \rightarrow q'$	Simplificación; 2
12.-	$(p'\wedge q') \rightarrow q'$	11; Ley conmutativa; 18b
13.-	$s' \rightarrow q'$	10,12; Silogismo hipotético; 13

14.-	q'	6,13; Modus ponens; 15
15.-	$q \wedge q'$	7,14; Conjunción; 14
16.-	0	15; Contradicción; 26

b) Primera.

Demostración por el método directo del siguiente teorema.

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [q' \rightarrow s'] \Rightarrow [(r' \wedge s) \rightarrow (q \wedge p')]$

1.-	$(p \wedge q) \rightarrow r$	Hipótesis
2.-	$q' \rightarrow s'$	Hipótesis
3.-	$r' \rightarrow (p \wedge q)'$	1; Contrapositiva; 23
4.-	$r' \rightarrow (p' \vee q')$	3; Ley de Morgan; 22b
5.-	$s \rightarrow q$	2; Contrapositiva; 23
6.-	$[r' \rightarrow (p' \vee q')] \wedge [s \rightarrow q]$	4,5; Conjunción; 14
7.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [(p' \vee q') \wedge q]$	6; Dilema constructivo; 9b
8.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [q \wedge (p' \vee q')]$	7; Ley conmutativa; 18b
9.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [(q \wedge p') \vee (q \wedge q')]$	8; Ley distributiva; 20b
10.-	$(r' \wedge s) \rightarrow (q \wedge p') \vee 0$	9; Contradicción; 26
11.-	$(r' \wedge s) \rightarrow (q \wedge p')$	10; Ley de identidad; 27a

Otra manera de resolver el mismo problema es

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [q' \rightarrow s'] \Rightarrow [(r' \wedge s) \rightarrow (q \wedge p')]$

Demostración.

1.-	$(p \wedge q) \rightarrow r$	Hipótesis
2.-	$q' \rightarrow s'$	Hipótesis
3.-	$[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [q' \rightarrow s']$	1,2; Conjunción; 14
4.-	$[(p \wedge q) \vee q'] \rightarrow (r \vee s')$	3; Dilema constructivo; 9a
5.-	$[q' \vee (p \wedge q)] \rightarrow (r \vee s')$	4; Ley conmutativa; 18a
6.-	$(r \vee s')' \rightarrow [q' \vee (p \wedge q)]'$	5; Contrapositiva; 23
7.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [q \wedge (p \wedge q)']$	6; Ley de Morgan; 22a
8.-	$(r \wedge s') \rightarrow [q \vee (p' \vee q')]$	7; Ley de morgan; 22b
9.-	$(r \wedge s') \rightarrow [(q \wedge p') \vee (q \wedge q')]$	8; Ley distributiva; 20b
10.-	$(r \wedge s') \rightarrow (q \wedge p') \vee 0$	9; Contradicción; 26
11.-	$(r \wedge s') \rightarrow (q \wedge p')$	10; Ley de identidad; 27a

Demostración por contradicción del teorema.

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [q' \rightarrow s'] \Rightarrow [(r' \wedge s) \rightarrow (q \wedge p')]$

1.-	$(p \wedge q) \rightarrow r$	Hipótesis
2.-	$q' \rightarrow s'$	Hipótesis
3.-	$[(r' \wedge s) \rightarrow (q \wedge p')]'$	Negación de la conclusión.

4.-	$[[(r' \wedge s) \wedge (q \wedge p')']']'$	3; Implicación; 24b
5.-	$(r' \wedge s) \wedge (q \wedge p')'$	4; Doble negación; 17
6.-	$(r' \wedge s)$	5; Simplificación; 11
7.-	r'	6; Simplificación; 11
8.-	s	6; Simplificación; 11
9.-	$(q \wedge p')'$	5; Simplificación; 11
10.-	$[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [q' \rightarrow s']$	1,2; Conjunción; 14
11.-	$[(p \wedge q) \vee q'] \rightarrow (r \vee s')$	10; Dilema constructivo; 9a
12.-	$[q' \vee (p \wedge q)] \rightarrow (r \vee s')$	11; Ley conmutativa; 18a
13.-	$[(q' \vee p) \wedge (q' \vee q)] \rightarrow (r \vee s')$	12; Ley distributiva; 20a
14.-	$(r \vee s')' \rightarrow [(q' \vee p) \wedge (q' \vee q)]'$13;	Contrapositiva; 23
15.-	$(r \vee s')' \rightarrow [(q' \vee p)' \vee (q' \vee q)']$	14; Ley de Morgan; 22b
16.-	$(r' \wedge s) \rightarrow [(q \wedge p') \vee (q \wedge q')]$	15; Ley de Morgan; 22a
17.-	$(r' \wedge s) \rightarrow (q \wedge p') \vee 0$	16; Contradicción; 26
18.-	$(r' \wedge s) \rightarrow (q \wedge p')$	17; Ley de identidad; 27a
19.-	$(r' \wedge s)'$	18,9; Modus tollens; 16
20.-	$(r \vee s')$	19; Ley de Morgan; 22b
21.-	s'	20,8; Silogismo disyuntivo; 12
22.-	$s \wedge s'$	8,21; Conjunción; 14
23.-	0	22; Contradicción; 26

c) Demostración por el método directo:

$[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [(q \vee s) \rightarrow t] \wedge (p \vee s) \Rightarrow t$

Demostración.

1.-	$p \rightarrow (q \wedge r)$	Hipótesis
2.-	$(q \vee s) \rightarrow t$	Hipótesis
3.-	$p \vee s$	Hipótesis
4.-	$(q \wedge r) \rightarrow q$	Simplificación; 11
5.-	$p \rightarrow q$	1,4; Silogismo hipotético; 13
6.-	$(p \vee s) \rightarrow (q \vee r')$	5; Más implicaciones lógicas; 8a
7.-	$(q \vee r')$	6,3; Modus ponens; 15
8.-	t	7,2; Modus ponens; 15

Demostración por contradicción.

$[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [(q \vee s) \rightarrow t] \wedge (p \vee s) \Rightarrow t$

Demostración

1.-	$p \rightarrow (q \wedge r)$	Hipótesis
2.-	$(q \vee s) \rightarrow t$	Hipótesis
3.-	$p \vee s$	Hipótesis
4.-	t'	Negación de la conclusión

5.-	$(q \vee s)'$	2,4; Modus tollens; 16
6.-	$q' \wedge s'$	5; Ley de Morgan; 22a
7.-	q'	6; Simplificación; 11
8.-	$s' \wedge q'$	6; Ley conmutativa; 18b
9.-	s'	8; Simplificación; 11
10.-	$s \vee p$	3; Ley conmutativa; 18a
11.-	p	10,9; Silogismo disyuntivo; 12
12.-	$q \wedge r$	11,1; Modus ponens; 15
13.-	q	12; Simplificación; 11
14.-	$q \wedge q'$	13,7; Conjunción; 14
15.-	0	14; Contradicción; 26

d) Demostración por el método directo del teorema:
$[p' \rightarrow r] \wedge q' \wedge (p \vee r') \wedge (r \rightarrow q) \Rightarrow [[p' \rightarrow (p \wedge q)] \wedge q']$

Demostración

1.-	$p' \rightarrow r$	Hipótesis
2.-	q'	Hipótesis
3.-	$(p \vee r')$	Hipótesis
4.-	$r \rightarrow q$	Hipótesis
5.-	$p' \rightarrow r'$	3; Implicación; 24a
6.-	$r \rightarrow p$	5; Contrapositiva; 23
7.-	$(r \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow q)$	6,4; Conjunción; 14
8.-	$(r \wedge r) \rightarrow (p \wedge q)$	7; Dilema constructivo; 9b
9.-	$r \rightarrow (p \wedge q)$	8; Ley de idempotencia; 21b
10.-	$p' \rightarrow (p \wedge q)$	1,9; Silogismo hipotético; 13
11.-	$[p' \rightarrow (p \wedge q)] \wedge q'$	10,2; Conjunción; 14

Demostración por contradicción.
$[p' \rightarrow r] \wedge q' \wedge (p \vee r') \wedge (r \rightarrow q) \Rightarrow [[p' \rightarrow (p \wedge q)] \wedge q']$

Demostración

1.-	$p' \rightarrow r$	Hipótesis
2.-	q'	Hipótesis
3.-	$(p \vee r')$	Hipótesis
4.-	$r \rightarrow q$	Hipótesis
5.-	$[[p' \rightarrow (p \wedge q)] \wedge q']'$	Negación de la conclusión
6.-	$[[[p' \rightarrow (p \wedge q)] \rightarrow q]']'$	5; Implicación; 24d
7.-	$[p' \rightarrow (p \wedge q)] \rightarrow q$	6; Doble negación; 17
8.-	$[p' \rightarrow (p \wedge q)]'$	7,2; Modus Tollens; 16
9.-	$[p \vee (p \wedge q)]'$	8; Implicación; 24a
10.-	$p' \wedge (p \wedge q)'$	9; Ley de Morgan; 22a
11.-	p'	10; Simplificación; 11
12.-	$(p \wedge q)'$	11; Simplificación; 11

13.-	$p' \rightarrow q$	1,4; Silogismo hipotético; 13
14.-	p	13,2; Modus Tollens; 16
15.-	$p \wedge p'$	11,14; Conjunción; 14
16.-	0	15; Contradicción; 26

e) Demostrar por contradicción el siguiente teorema.

$[p' \rightarrow q'] \wedge [r' \rightarrow s'] \wedge [(q' \vee s') \rightarrow t] \Rightarrow [t' \rightarrow (p \wedge r)]$

Demostración

1.-	$p' \rightarrow q'$	Hipótesis
2.-	$r' \rightarrow s'$	Hipótesis
3.-	$(q' \vee s') \rightarrow t$	Hipótesis
4.-	$[t' \rightarrow (p \wedge r)]'$	Negación de la conclusión
5.-	$[t \vee (p \wedge r)]'$	4; Implicación; 24c
6.-	$t' \wedge (p \wedge r)'$	5; Ley de Morgan; 22a
7.-	t'	6; Simplificación; 11
8.-	$(p \wedge r)'$	6; Simplificación; 11
9.-	$[p' \rightarrow q'] \wedge [r' \rightarrow s']$	1,2; Conjunción; 14
10.-	$(p' \vee r') \rightarrow (q' \vee s')$	9; Dilema constructivo; 9a
11.-	$(p \wedge r)' \rightarrow (q' \vee s')$	10; Ley de Morgan; 22b
12.-	$(p \wedge r)' \rightarrow t$	11,3; Silogismo hipotético; 13
13.-	t	8,12; Modus ponens; 15
14.-	$t' \wedge t$	7,13; conjunción; 14
15.-	0	14; Contradicción; 26

4.19.-

a) $5 + 15 + 25 + 35 + \ldots\ldots + (10n - 5) = 5n^2$

Paso básico k = n = 1

$(10n - 5) = 10(1) – 5 = 5$ $\therefore$ Se cumple el paso básico.

Paso inductivo k = n+1

$5 + 15 + 25 + 35 + \ldots\ldots + (10n - 5) + [10(n+1) – 5] = 5n^2 + [10(n+1) – 5]$

$= 5n^2 + 10n + 5$

$= 5(n^2 + 2n + 1)$

$= 5(n + 1)(n + 1)$

Sustituyendo k = n+1

$= 5k^2$ $\therefore$ Se cumple el paso inductivo

b) $\dfrac{3}{1\circ 3}+\dfrac{3}{3\circ 5}+\dfrac{3}{5\circ 7}+\dfrac{3}{7\circ 9}+\ldots\ldots+\dfrac{3}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{3n}{(2n+1)}$

Paso básico k = n = 1

$\dfrac{3}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{3}{[2(1)-1][2(1)+1]}=\dfrac{3}{1\circ 3}$ $\therefore$ Se cumple el paso básico.

Paso inductivo k = n+1

$$\frac{3}{1\circ 3}+\frac{3}{3\circ 5}+\frac{3}{5\circ 7}+\frac{3}{7\circ 9}+\ldots\ldots+\frac{3}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{3}{[2(n+1)-1][2(n+1)+1]}=$$

$$\frac{3n}{(2n+1)}+\frac{3}{[2(n+1)-1][2(n+1)+1]}$$

$$=\frac{3n}{(2n+1)}+\frac{3}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{(2n+3)3n+3}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(6n^2+9n+3)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{3(2n^2+3n-1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{3(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{3(n+1)}{(2n+3)}=\frac{3(n+1)}{(2(n+1)+1)}=\frac{3k}{(2k+1)}$$

c) $\dfrac{a}{2}+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{2}+\dfrac{a^4}{2}+\ldots\ldots+\dfrac{a^n}{2}=\dfrac{(a^{n+1}-1)}{2(a-1)}$ $a\in$R; $a\neq 0$; $a\neq 1$

Paso básico k = n = 1

$a^n = a$ $\therefore$ Se cumple el paso básico

Paso inductivo k = n+1

$$\frac{a}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{2}+\frac{a^4}{2}+\ldots\ldots+\frac{a^n}{2}+\frac{a^{n+1}}{2}=\frac{(a^{n+1}-1)}{2(a-1)}+\frac{a^{n+1}}{2}$$

$$=\frac{(a^{n+1}-1)}{2(a-1)}+\frac{a^{n+1}}{2}=\frac{(a^{n+1}-1)+(a-1)a^{n+1}}{2(a-1)}$$

$$= \frac{(a^{n+1}-1)+(a^{n+2}-a^{n+1})}{2(a-1)} = \frac{(a^{n+2}-1)}{2(a-1)}$$

$$= \frac{(a^{n+1+1}-1)}{2(a-1)} = \frac{(a^{k+1}-1)}{2(a-1)}$$

d) $2^n \geq n^2$ $\quad n \in Z^+; \; n \geq 4$

Paso básico k = n = 4 (ya que en este caso se indica que el primer elemento no es cuando n=1)

$2^n = 2^4 \geq 4^2$

Paso inductivo k = n+1
$2^n + 2^{n+1} \geq n^2 + 2^{n+1}$
$2^n + 2^{n+1} \geq n^2 + 2^n 2$
Sabemos que $\forall n; n \in Z^+$
$2^n \geq (n+1)$
Sustituyendo $2^n = (n+1)$ se tiene que:
$2^n + 2^{n+1} \geq n^2 + (n+1)\,2$
$2^n + 2^{n+1} \geq n^2 + 2n + 2$
$2^n + 2^{n+1} \geq (n+1)(n+1)$
Como k = n+1
$2^n + 2^{n+1} \geq k^2$

e) $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ $\quad n \in N$

Paso basico k = n = 0(en este caso n = 0, ya que es el primer elemento de N)

$2^n = 2^0$ $\quad \therefore$ se cumple el paso básico

Paso inductivo k = n+1
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$
$= 22^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 = 2^{n+1+1} - 1 = 2^{k+1} - 1$

f) $(2^{1-1}) + (2^{2-1}) + (2^{3-1}) + \ldots\ldots + (2^{n-1}) = 2^n - 1$

Paso básico k = n =1

$(2^{n-1}) = (2^{1-1})$ $\quad \therefore$ se cumple el paso básico

Paso inductivo k = n+1
$(2^{1-1}) + (2^{2-1}) + (2^{3-1}) + \ldots\ldots + (2^{n-1}) + (2^{n+1-1}) = 2^n - 1 + (2^{n+1-1})$
$= 22^n - 1 = 2^{n+1} - 1 = 2^k - 1$

4.21.-

Si n=6 se obtienen los siguientes valores para cada una de las variables.

x	e	s
1	2	2
2	5	7
3	8	15
4	11	26
5	14	40
6	17	57

SE NOTA QUE EL TÉRMINO N-ESIMO ES (3N-1) YA QUE ES EL QUE GENERA LOS TÉRMINOS QUE SE VAN SUMANDO EN CADA ITERACIÓN.

Si n = 6; los elementos a sumar son: 2 + 5+ 8 + 11 + 14 + 17 Se observa que al sumar los extremos el resultado es 2+17=19, el segundo con el penúltimo 5+14=19 y también 8+11=19. Como n=6 entonces 19=3(6)+1=3n+1. Además como son tres parejas las que se están sumando 3= $\frac{n}{2}$. Al multiplicar el número de parejas por el resultado de las sumas se tiene que: $\frac{n(3n+1)}{2}$ = $\frac{3n^2+n}{2}$. De tal mono que la proposición P(n) a probar por medio de inducción matemática es como sigue:

$$2 + 5 + 8 + \dots\dots + (3n-1) = \frac{3n^2+n}{2}$$

Paso básico k = n = 1

$(3n-1)$ = 3(1) – 1 =2 $\therefore$ Se cumple el paso básico.

Paso inductivo k = n+1

$$2 + 5 + 8 + \dots\dots + (3n-1) + [3(n+1)-1] = \frac{3n^2+n}{2} + [3(n+1)-1]$$

$$= \frac{3n^2+n}{2} + [3(n+1)-1] = \frac{3n^2+n+2[3(n+1)-1]}{2}$$

$$= \frac{3n^2+n+2(3n+2)}{2} = \frac{3n^2+n+6n+4}{2}$$

$$= \frac{3n^2+7n+4}{2} = \frac{(3n+4)(n+1)}{2} = \frac{[3(n+1)+1](n+1)}{2}$$

$$= \frac{(3k+1)k}{2} = \frac{(3k^2+k)}{2}$$

4.23.- Para demostrar que en el peor de los casos el número de comparaciones que lleva a cabo el sort de la burbuja es $\frac{n^2-n}{2}$, es necesario saber la mecánica en que realiza el ordenamiento de información. Considerar que n=5 y que los elementos a ordenar son: 8,4,-1,10,2.

Inicialmente	4 comparaciones	1ª.Pasada	3 Comparaciones	2ª. Pasada	2 Comparaciones	3ª. Pasada	1 Comparaciones	4ª. Pasada	0 Comparaciones
8		4		-1		-1		-1	
4		-1		4		2		2	
-1		8		2		4		4	
10		2		8		8		8	
2		10		10		10		10	

En cada paso el algoritmo lleva a cabo (n-1) comparaciones, pero además después de la primera pasada el dato que se encuentra al final (en este caso el 10) se considera que ya está en su lugar y ya no lo toma en cuenta en la siguiente pasada. Al recorrer nuevamente la información el número de comparaciones se disminuye en 1 y el penúltimo dato ya no lo toma en cuenta y así sucesivamente hasta terminar.

Por lo anterior la proposición P(n) que representa el funcionamiento del sort de la burbuja es:

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1) = \frac{n^2-n}{2}$$

Comparaciones en la 1ª. pasada

Comparaciones en la penúltima pasada

Comparaciones en la ultima pasada

$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + (n-1) = \dfrac{n^2-n}{2}$

Paso básico k = n = 1

$(n-1) = 1-1 = 0$ $\therefore$ Por lo tanto el paso básico se cumple.

Paso inductivo k = n+1

$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + (n-1) = \dfrac{n^2-n}{2}$

$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + (n-1) + [(n+1)-1] = \dfrac{n^2-n}{2} + [(n+1)-1]$

$$= \frac{n^2-n+2[(n+1)-1]}{2} = \frac{n^2-n+2n}{2}$$

$$= \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1-1)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(k-1)k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

4.25.-

Sean:
p: “Tiene alas”.
q: “Vuelan”
r: “Tienen alas y vuelan”
s: “Cacarean”
t: “Ponen huevos”
u: “Es ave”
v: “Es gallina”
w: “Es mamífero”

a) $\forall$x p(x). (falso)
b) $\exists$x q(x). (cierto)
c) $\exists$x [p(x) $\wedge$ q(x)] o bien $\exists$x r(x) (cierto)
d) $\exists$x [p(x) $\wedge$ q’(x)] (cierto)
e) $\forall$x u(x) $\Rightarrow$ p(x) (cierto)
f) $\forall$x [u(x) $\wedge$ t(x) $\wedge$ s(x)] $\Rightarrow$ v(x) (cierto)
g) $\exists$x [v(x) $\wedge$ t’(x)] (cierto)
h) $\forall$x u(x) $\Rightarrow$ w’(x). (cierto)

4.27.-

a) "Para todo número real, existe al menos un número real en donde se cumple que $y=x^2-1$" (**Verdadero**) ya que para todo número real ($\forall x$), siempre se va a encontrar un real ($\exists y$) que satisface $y=x^2-1$.
b) "Existe un número real para el cual se cumple que $y=x^2-1$ para todos los números reales". (**Falso**) ya que dado x la igualdad $y=x^2-1$ es cierta solo para uno o dos valores de y, pero no para todos.
c) "Para algún número real, se cumple que $y=x^2-1$ para todos los números reales". (**Falso**), al igual que inciso b) ya que $\exists x\ \forall y\ p(x,y) \Leftrightarrow \forall y\ \exists x\ p(x,y) \Leftrightarrow \exists x\ p(x,y)$ debido a que el conjunto del discurso es el mismo tanto para *x* como para *y.* Solamente cambiaron de posición los cuantificadores, pero no los parámetros.
d) "Para todo número real se cumple que $y=x^2-1$ para todos los reales". (**Falso**) ya que existen algunos valores de "y" en donde para ningún valor de "x" se cumple que "$y=x^2-1$"; ejemplo $y=-2$.
e) "Para algún número real se cumple que $y=x^2-1$ para cuando menos un número real". (**Verdadero**) ya que todos los puntos de la parábola $y=x^2-1$ satisfacen la condición.

4.29.-

a) $\exists y\ \forall x\ [\ p(x,y) \wedge q(x,y) \Rightarrow r(x,y)]$ $\quad x,y \in U$
b) $\forall y\ \exists x\ [\ p'(x,y) \vee r(x,y) \Rightarrow q'(x,y)]$ $\quad x,y \in U$
c) $\exists x\ \exists y\ r(x,y) \vee \exists x\ q(x,y) \wedge \exists y\ p'(x,y)$ $\quad x,y \in U$