MATEMÁTICAS PARA LA COMPUTACIÓN
CAPÍTULO 6. RELACIONES

RESPUESTA Y DESARROLLO DE EJERCICIOS

AUTOR: JOSÉ ALFREDO JIMÉNEZ MURILLO

6.1.-

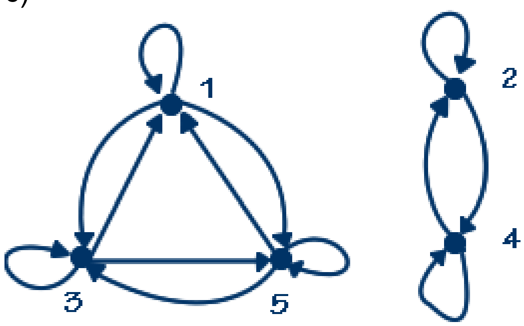
a)

S={(4,1),(4,3),(5,1),(5,3)}

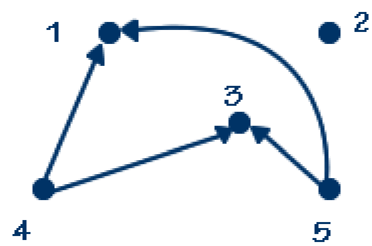
b)

$$M_R = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

c)



Grafo dirigido de R



Grafo dirigido de S

d)

Relación R

- Si es reflexiva. Ya que ∀a∈A, (a,a)∈R.
- No es irreflexiva. Ya que no se cumple que ∀a∈A, (a,a)∉R. Ejemplo de ello es el par ordenado (1,1) que se encuentra en la relación.
- Si es simétrica. Ya que se cumple en todos los casos que si (a,b)∈R, entonces (b,a)∈R. O bien $M_R=M_R^T$.
- No es asimétrica. Ya que no se cumple que cuando (a,b)∈R entonces (b,a)∉R. Ejemplo de ello es que (3,1)∈R pero también (1,3)∈R. Por otro lado; tampoco se cumple que si a=b (a,a)∉R. En otras palabras los pares colocados simétricamente deben ser contrarios y la diagonal debería contener solamente ceros, pero no ocurre así.
- No es antisimétrica. Ya que no ocurre con los pares simétricos que (a,b)∉R o bien (b,a)∉R. Ejemplo de ello es que (2,4)∈R y también (4,2)∈R.

- Si es transitiva. Ya que se cumple en todos los casos que si (a,b)∈R y (b,c)∈R entonces (a,c)∈R. La forma de llevar a cabo esta comprobación es demostrando que M_R=($M_R \cup M_R^2$), como se muestra a continuación.

$$M_R \quad = \quad \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$M_R^2 \quad = \quad \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \odot \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$M(_{R \cup R^2}) \quad = \quad \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Relación S

- No es reflexiva. Ya que no se cumple que ∀a∈A, (a,a)∈R. Ejemplo (1,1)∉S
- Si es irreflexiva. Ya se cumple que ∀a∈A, (a,a)∉R. Se observa porque la diagonal principal de M_S contiene exclusivamente ceros.
- No es simétrica. Ya que no cumple en todos los casos que si (a,b)∈R, entonces (b,a)∈R. Ejemplo (4,1)∈S pero (1,4)∉S. Se ratifica esta afirmación ya que $M_R \neq M_R^T$.
- Si es asimétrica. Ya que se cumple en todos los casos que cuando (a,b)∈R entonces (b,a)∉R. Además también se cumple que si a=b (a,a)∉R ya que su diagonal contiene exclusivamente ceros.
- Si es antisimétrica. Ya que se cumple que para los pares simétricos (a,b)∉R o bien (b,a)∉R. Esto implica que los pares colocados simétricamente son pares de ceros o bien contrarios (Uno de ellos es 0 y el otro 1), la diagonal en este caso no es importante.
- No es transitiva. Ya que no existe ningún caso en donde si (a,b)∈R y (b,c)∈R entonces (a,c)∈R. Además se cumple que M_R=($M_R \cup M_R^2$). Ya que $M_R^2 = \varnothing$ como se muestra a continuación.

$$M_S = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$M_S^2 = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \odot \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

e)

La relación R

Si es una relación de equivalencia ya que es Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

- Las clases de equivalencia son:

  [1]=[3]=[5]={1,3,5}
  [2]=[4]={2,4}

- La partición es:
  λ={[1],[2]}={{1,3,5},{2,4}}

La relación S

No es una relación de equivalencia ya que no es Reflexiva, tampoco es Simétrica ni Transitiva. Por tal razón se deberán aplicar las cerraduras correspondientes.

- Cerradura Reflexiva:
- $(S \cup I)$={(1,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)}
- Cerradura Simétrica:
- $(S \cup S^{-1})$
  ={(1,1),(1,4),(1,5),(2,2),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)}
- Cerradura transitiva.

$$M_S^2 = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \odot \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$M_{(S\cup S^2)} = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \cup \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Como esta relación ahora es transitiva

- Las clases de equivalencia son:

  [1]=[3]=[4]=[5]={1,3,4,5}
  [2]={2}

- La partición es:
  λ={[1],[2]}={{1,3,4,5},{2}}

f)

$$M_{R'} = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$M_{(R'\cap S)} = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \cup \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$M_{(R'\cap S)}^{-1} = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

g)
No es relación de equivalencia ya que no es reflexiva, ni simétrica aunque si es transitiva.

6.3.-

a)

$$M_R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$M_{S}{}^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \qquad M_{(S^{-1} \cap R)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$M_{S'} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$M_{(S^{-1} \cap R) \circ S'} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \odot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

b)

- No es reflexiva. Ya que no se cumple que $\forall a \in A$, $(a,a) \in R$. Realmente ningún elemento está relacionado con él mismo.
- Si es irreflexiva. Ya que se cumple que $\forall a \in A$, $(a,a) \notin R$. Se observa porque su diagonal principal contiene exclusivamente ceros.
- No es simétrica. Ya que no se cumple en todos los casos que si $(a,b) \in R$, entonces $(b,a) \in R$. Ejemplo de ello es que $(3,1) \in R$ pero $(1,3) \notin R$. Existen más casos, pero con uno que se exhiba es suficiente.

- No es asimétrica. Ya que no se cumple que cuando $(a,b)\in R$ entonces $(b,a)\notin R$. Ejemplo de ello es que $(4,1)\in R$ pero también $(1,4)\in R$.
- No es antisimétrica. Ya que no ocurre con los pares simétricos que $(a,b)\notin R$ o bien $(b,a)\notin R$. Ejemplo de ello es que $(4,2)\in R$ y también $(2,4)\in R$.
- No es transitiva. Ya que no se cumple en todos los casos que si $(a,b)\in R$ y $(b,c)\in R$ entonces $(a,c)\in R$. La forma de llevar a cabo esta comprobación es demostrando que $M_R \neq M_R^2$, como se muestra a continuación.

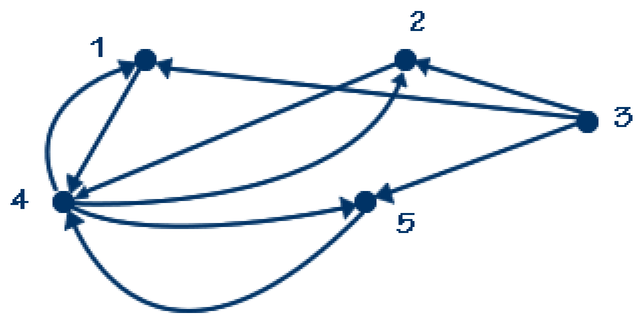
En este caso M_R es la relación resultante:

$$M_R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$M_R^2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \odot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Como $M_R \neq M_R^2$ se concluye que la relación resultante $M_{(S^{-1}\cap R)\circ S}'$ no es transitiva.

c) El grafo dirigido de $M_{(S^{-1}\cap R)\circ S}'$ es:



6.5.-

a)

- Es reflexiva. Ya que se cumple que $\forall a \in A$, $(a,a) \in R$. Un bosquejo de matriz es:

$$M_S = \begin{array}{c|ccccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

En la matriz es posible observar que la diagonal principal contiene exclusivamente 1s con la cual se concluye que se trata de una relación reflexiva.

- No es irreflexiva. Ya que no se cumple que $\forall a \in A$, $(a,a) \notin R$. Ejemplo $(1,1) \in R$.
- Si es simétrica. Ya que cumple en todos los casos que si $(a,b) \in R$, entonces $(b,a) \in R$. Se puede observar claramente que $M_R = M_T$.
- No es asimétrica. Ya que no se cumple que cuando $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \notin R$. Ejemplo de ello es que $(3,2) \in R$ pero también $(2,3) \in R$. Además la diagonal principal no contiene exclusivamente 0s.
- No es antisimétrica. Ya que no ocurre con los pares simétricos que $(a,b) \notin R$ o bien $(b,a) \notin R$. Ejemplo de ello es que $(3,1) \in R$ y también $(1,3) \in R$.
- No es transitiva. Ya que no se cumple en todos los casos que si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces $(a,c) \in R$. Ejemplo $(1,3) \in R$; $(3,5) \in R$; pero $(1,5) \notin R$.

Se puede observa que cuando no cumple con una propiedad es suficiente que con la exhibición de un caso.

b) Para que sea una relación de equivalencia deberá cumplir que tiene las propiedades de Reflexiva, Simétrica y Transitiva. Pero como no es transitiva entonces no es una relación de equivalencia.

6.7.-

a)

$$M_R = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$M_T = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad M_{T^{-1}} = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$M_{T^{-1}\cup S} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{R'} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{R'\circ T} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \odot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{(T^{-1}\cup S)\cap(R'\circ T)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \odot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

b)

Tomando relación resultante en el inciso a como R.

Cerradura reflexiva.

$$M_{R\cup I}= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Cerradura Simétrica.

$$M_{R\cup R^{-1}}= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Cerradura Transitiva.

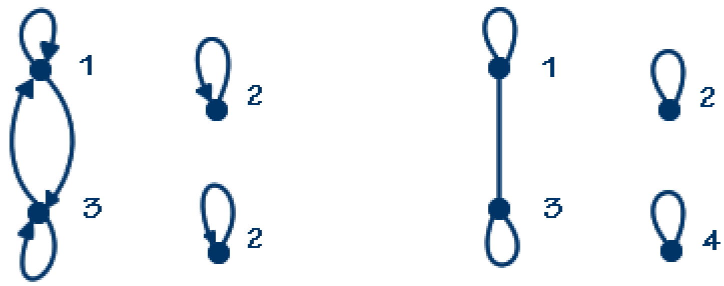
$$M_R^{2}= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cup \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En este caso $M_R=M_R^2$ y por lo tanto ya es transitiva en caso de no haber ocurrido esto se tendría que llevar a cabo $M_{R\cup R^2}$ para darle la propiedad de transitividad.

c)

Clases de equivalencia	Partición
[1]={1,3}	
[2]={2}	
[3]={1,3}	λ={[1],[2],[4]}={{1,3},{2},{4}}
[4]={4}	

d)



Grafo dirigido   Grafo no dirigido

6.9.-

a) Demostrar que: R es antisimétrica si solo si $(R \cap R^{-1}) \subseteq I$

En una relación antisimétrica R
Para los elementos que no se encuentran en la diagonal $(a \neq b)$
si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \notin R$ (los pares simétricos de R son contrarios)

Por otro lado no pueden existir dos pares simétricos, existe uno de ellos o ninguno
Si $(a,b) \notin R^{-1}$ entonces $(b,a) \in R$ o bien $(b,a) \notin R^{-1}$
Si $(a,b) \in R$ entonces $(a,b) \notin R^{-1}$. y $(b,a) \in R^{-1}$.
Y si $(a,b)) \notin R$ entonces $(b,a)) \notin R^{-1}$ ó $(b,a)) \notin R$

Si los elementos forman parte de la diagomnal $(a=b)$
Si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R$ y $(b,a) \in R^{-1}$
Si $(a,b) \notin R$ entonces $(b,a) \notin R$ y $(b,a) \notin R^{-1}$

Debido a que cuando $a \neq b$ $(R \cap R^{-1}) = \varnothing$; y cuando $a=b$ $(R \cap R^{-1}) = R$ se puede concluir que:

R es antisimétrica si solo si $(R \cap R^{-1}) \subseteq I$

b) Demostración: Si $R \subseteq S$ entonces $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

Si $(a,b) \in R$ entonces $(a,b) \in R^{-1}$.
Si $(a,b) \in S$ entonces $(a,b) \in S^{-1}$.
Si $(c,d) \in S$ entonces $(d,c) \in S^{-1}$.
Si $(c,d) \notin R$ entonces $(a,b) \notin R^{-1}$.

$\therefore$ Si $R \subseteq S$ entonces $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

6.11.-

a)

X = 4

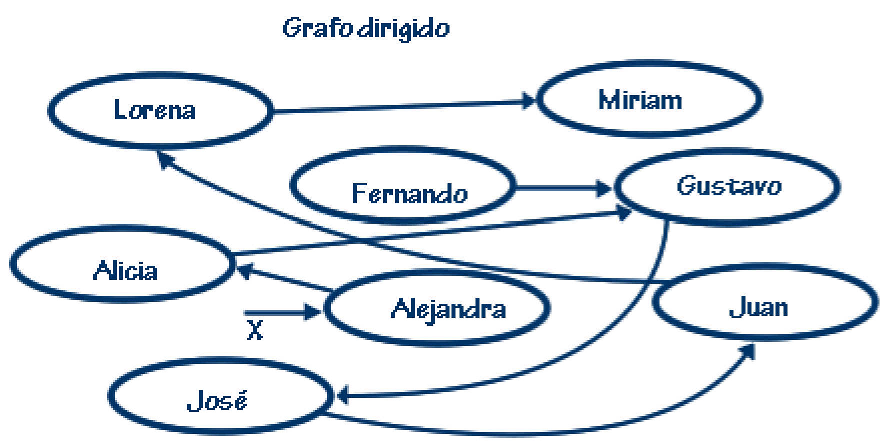
	A		P
1	Lorena	1	2
2	Miriam	2	*
3	Gustavo	3	6
4	Alicia	4	5
5	Fernando	5	3
6	Juan	6	1

b)

X = 8

	A		P
1	Lorena	1	2
2	Miriam	2	*
3	Gustavo	3	7
4	Alicia	4	3
5	Fernando	5	3
6	Juan	6	1
7	José	7	6
8	Alejandra	8	4

c)



d)

X = 2

	A		P
1	Lorena	1	6
2	Miriam	2	1
3	Gustavo	3	4
4	Alicia	4	8
5	Fernando	5	3
6	Juan	6	7
7	José	7	3
8	Alejandra	8	*

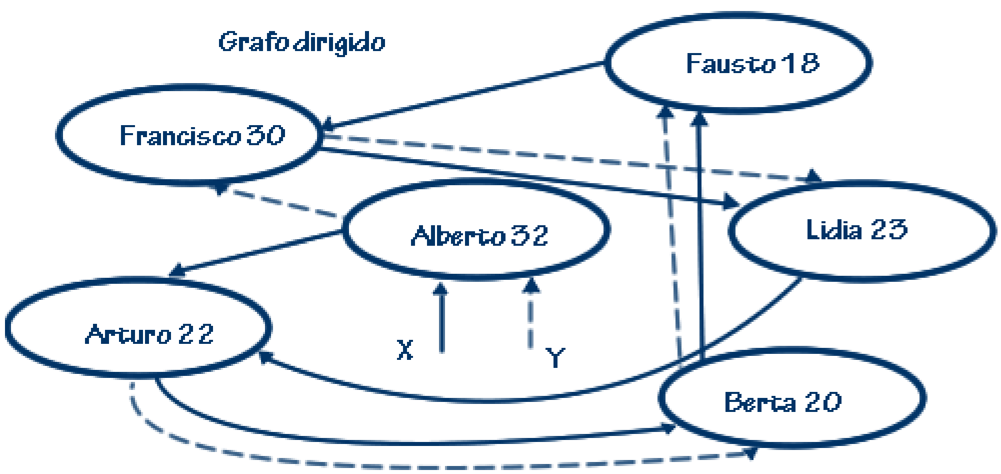
6.13.-

a)

X = 4
Y = 4

	A			P	
1	Francisco	30	1	5	5
2	Fausto	18	2	1	*
3	Arturo	22	3	6	6
4	Alberto	32	4	3	1
5	Lidia	23	5	*	3
6	Bertha	20	6	2	2

b)



c)

X = 4
Y = 4

A

1	Francisco	30
2	Fausto	18
3	Arturo	22
4	Alberto	32
5	Lidia	23
6	Bertha	20
7	Pedro	13

P

1	5	5
2	1	*
3	6	6
4	3	1
5	7	3
6	1	7
7	*	*

6.15.-

A) colocando 1 en las celdas cuyo departamento sea “producción” y en las celdas cuyo salario sea mayor a 3100. Se tienen las siguientes bases de datos.

Relación A

Reg.	Código	Nombre	Departamento
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	0	0
4	0	0	1
5	0	0	1
6	0	0	0

Relación B

Reg.	Código	Puesto	Salario
1	0	0	1
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	1
5	0	0	1
6	0	0	0

Después de realizar la unión entre las dos relaciones se tiene:

A∪B

Reg.	Código	Nombre	Departamento	Puesto	Salario
1	0	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0

Al llevar a cabo la intersección entre las columnas Departamento y Salario se obtiene la siguiente relación.

Relación C

Reg.	Nombre	Puesto	Salario
1	Fernando	Obrero	3200
2	Carlos	Supervisor	5000

b)
Colocando 1 en las celdas en donde Puesto=”Obrero”, Puesto”Secretaria” y Departamento=”Contabilidad” se tienen las siguientes relaciones.

Relación A

Reg.	Código	Nombre	Departamento
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	1

Relación B

Reg.	Código	Puesto	Salario
1	0	0	0
2	0	1	0
3	0	1	0
4	0	1	0
5	0	0	0
6	0	1	0

Después de llevar a cabo la unión se tiene:

A∪B

Reg.	Código	Nombre	Departamento	Puesto	Salario
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	1	1	0

De tal forma que al llevar a cabo las operaciones Puesto=”Obrero” o bien (Puesto=”Secretaria” y Departamento=”Contabilidad”) se tiene la siguiente relación.

Relación C

Reg.	Código	Puesto	Departamento
1	6072	Obrero	Producción
2	7512	Obrero	Producción
3	7020	Secretaria	Contabilidad

c)
Colocando un 1 a los trabajadores cuyo Departamento = “producción”.

Relación A

Reg.	Código	Nombre	Departamento
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	0	0
4	0	0	1
5	0	0	1
6	0	0	0

Relación B

Reg.	Código	Puesto	Salario
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0

Llevar a cabo una unión entre las relaciones A y B.

Relación A∪B

Reg.	Código	Nombre	Departamento	Puesto	Salario
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0

Se encuentra el complemento de esta relación cambiando todos los ceros por unos y los unos por ceros.

Relación (A∪B)'

Reg.	Código	Nombre	Departamento	Puesto	Salario
1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	0	1	1
5	1	1	0	1	1
6	1	1	1	1	1

Finalmente se obtiene la relación con todos aquellos registros que contienen un 1 en la celda de Departamento, Con los campos solicitados y con la información correspondiente.

Relación C

Reg.	Nombre	Departamento	Salario
1	José	Mantenimiento	4300
2	Alicia	R. Humanas	2800
3	Carmen	Contabilidad	3000

6.17.-

a) R={(1,a),(2,b),(3,d),(4,c)}

- Es una función.
- Dom(R)=Dom(f)={1,2,3,4}; Cod(R)=Cod(f)={a,b,c,d}
- Es Inyectiva, ya que $\forall a \in A$ corresponde un elemento diferente $b \in B$. Es suprayectiva ya que Cod(f)=B. Por lo tanto se trata de una función Biyectiva.
- Es invertible, su inversa es $f^{-1}=R^{-1}$={(a,1),(b,2),(d,3),(c,4)}. Por ser invertible su inversa también es una función.

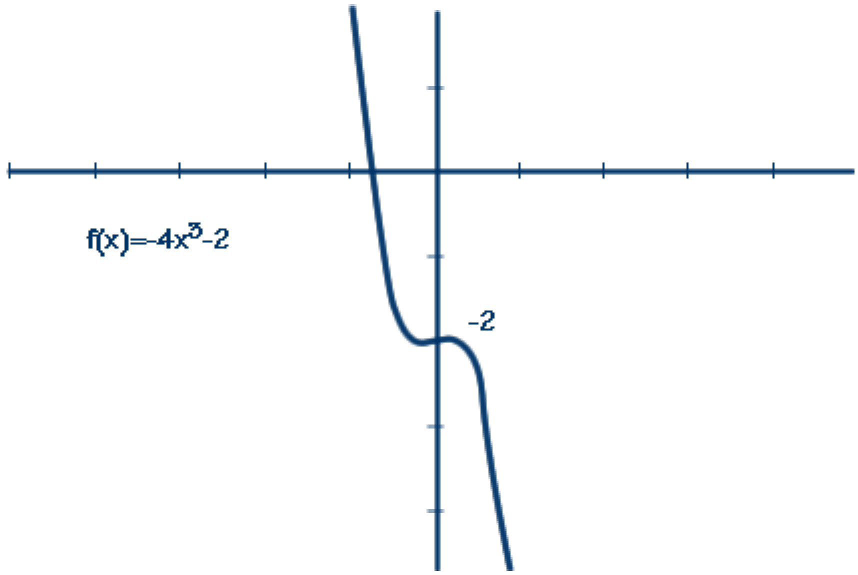
b) R={(1,a),(2,a),(3,a),(4,a)}

- Es una función.
- Dom(R)=Dom(f)={1,2,3,4}; Cod(R)=Cod(f)={a}
- No es Inyectiva, ya que no se cumple que $\forall a \in A$ corresponde un elemento diferente $b \in B$. Ejemplo: los elementos 1, 2, 3 y 4 tienen la misma imagen **a**. Tampoco es suprayectiva ya que Cod(f)$\neq$B, faltan los elementos b,c y d en el codominio. No es biyectiva porque no es inyectiva ni suprayectiva.
- No es invertible, porque no es una biyección.

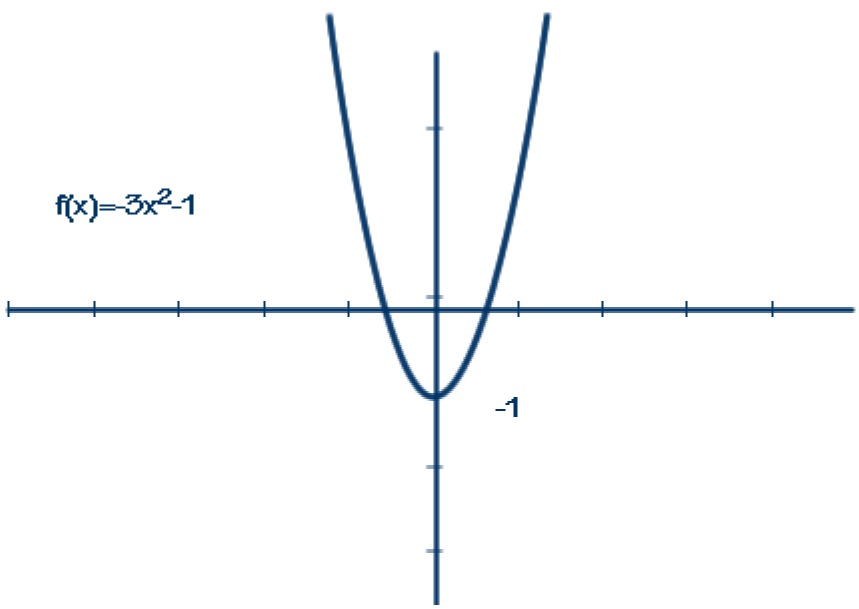
c) R={(1,b),(1,c),(2,a),(2,d)}
- No es función ya que Dom(R)$\neq$A. En otras palabras no se encuentran relacionados todos los elementos de A.
- Dom(R)={1,2}; Cod(R)={a,b,c,d}
- Como no es función no procede verificar si es inyectiva, suprayectiva o biyectiva.
- Como no es función entonces no procede verificar si se trata de una función invertible.

d) R={(1,c),(2,c),(3,d),(4,d)}
- Si es función.
- Dom(R)=Dom(f)={1,2,3,4}; Cod(R)=Cod(f)={c,d}
- No es inyectiva ya que elementos del conjunto A tienen la misma imagen en B. Ejemplo: (1,c) y /2,c). Tampoco es suprayectiva ya que Cod(f)$\neq$B
- No es invertible ya que no es biyectiva.

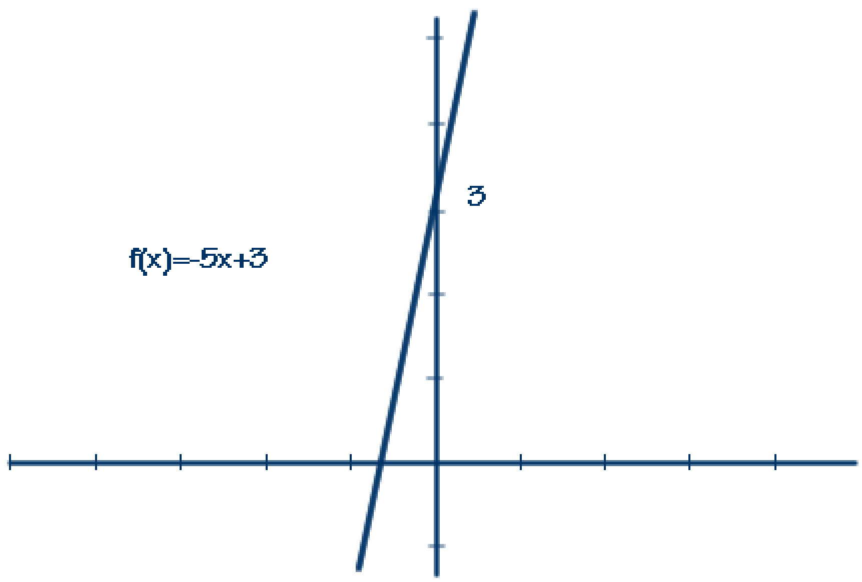
6.19.-



a) Es una función ya que se cumple que Dom(f)=A y a cada valor de $x \in A$ solamente le corresponde un valor de $y \in B$.
b) Es una función inyectiva ya que $\forall x \in A$ corresponde un elemento diferente $y \in B$. Es suprayectiva ya que Cod(f)=B. Por lo tanto se trata de una función Biyectiva y es Invertible. Su inversa es $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{-\frac{y+2}{4}}$, la cual también es una función, ya que la inversa de una función invertible, también es una función.



a) Es una función ya que se cumple que Dom(f)=A y a cada valor de $x \in A$ solamente le corresponde un valor de $y \in B$.
b) No es una función inyectiva ya que no se cumple que $\forall x \in A$ debe corresponder un solo elemento diferente $y \in B$, lo cual se puede apreciar en la gráfica ya que para dos valores de x difrentes se tiene que f(x)=0, que son los puntos donde se encuentran las raíces. Tampoco es suprayectiva ya que Cod(f)≠B, el conjunto B es el conjunto de los números reales sin embargo Cod(f)={y /y∈; -1≤y≤∞}. Por lo tanto no es una función Invertible.



a) Es una función ya que se cumple que Dom(f)=A y a cada valor de $x \in A$ solamente le corresponde un valor de $y \in B$.
b) Es una función inyectiva ya que $\forall x \in A$ corresponde un elemento diferente $y \in B$. Es suprayectiva ya que Cod(f)=B. Por lo tanto se trata de una función Biyectiva y es Invertible. Su inversa es $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{5}$.
c)

$f \circ h \circ g \circ g(2) = g(g(h(f(2)))) = g(g(h(-34))) = g(g(-167)) = g(83666)$
$= 2.099999867 \times 10^{10}$

$g \circ f \circ h \circ f(-x) = f(h(f(g(-x)))) = f(h(f(3x^2-1))) = f(h(-4(x^2-1)^3-2))$
$= f(-20(x^2-1)^3-7) = -4(-20(x^2-1)^3-7)^3-2$

6.21.-

a) $g \circ f\,(2) = f(g(2))=f(2^5)=f(32)=3(32)+32^3$.
b) $f \circ g\,(x-1) = g(f(x-1)) = g(3(x-1)+(x-1)^3) = g(3x-3+x^3-3x^2+3x-1)$
$= g(x^3-3x^2+6x-4) = (x^3-3x^2+6x-4)^5$.

c) $g \circ f \circ h(x) = h(f(g(x))) = h(f(x^5)) = h(3x^5+(x^5)^3) = h(3x^5+x^{15}) = 3x^5+x^{15}+1$
d) $f \circ g \circ h(-x) = h(g(f(-x))) = h(g(3(-x)+(-x)^3) = h(g(-3x-x^3)) = h((-3x-x^3)^5)$
$= (-3x-x^3)^5+1$

6.23.-

```
programa min_com_múltiplo;
var
 a,b: enteros;

función mcm(a,b: enteros):enteros;
var
 j, resultados, p: enteros;

inicio
 resultado := 1;
p :=0;

Mientras (a<>1) ó (b<>1) hacer
 Inicio
   j:=2;
   Mientras (j<=a) ó (j<=b) hacer
     Inicio
        Si (a mod j =0) y (b mod j=0) entonces
               Inicio
                  resultado := resultado * j;
                   a := a div j;
                   b := a div j;
                   p := 1;
              Fin
        Sino
          Si a mod j = 0 entonces
             Inicio
               resultado := resultado *j;
               a := a div j;
               p :=1;
             Fin
        Sino
                Si b mod j = 0 entonces
             Inicio
               Resultado := resultado *j;
```

```
              b := b div j;
              p :=1;
            Fin;
          Si p = 1 entonces
              p := 0;
            Sino
             Inicio
                Resultado := resultado *j;
                b := b div j;
                p :=0;
            Fin;
        Fin;
     Fin;
   mcm := resultado;
 Fin;


Inicio   {Programa principal}
 Imprimir ('Valor de A: ');   Leer(a);
 Imprimir ('Valor de B: ');    Leer(b);
 Imprimir ('mínimo común múltiplo es = ' mcm(a,b));
Fin.
```