Simplificación de expresiones booleanas usando mapas de Karnaugh

José Alfredo Jiménez Murillo

El método del mapa de Karnaugh es un procedimiento simple y directo para minimizar las expresiones booleanas, y fue propuesto por Edward W. Veitch y modificado ligeramente por Maurice Karnaugh.

El mapa representa un diagrama visual de todas las formas posibles en que se puede plantear una expresión booleana en forma normalizada. Al reconocer varios patrones se pueden obtener expresiones algebraicas alternas para la misma expresión, y de éstas se puede escoger la más simple, la cual en general es la que tiene el menor número de variables, además de que esta expresión posiblemente no sea única.

Las tablas o mapas se dividen en cierto número de casillas, dependiendo de la cantidad de variables que intervengan en la expresión. El número de casillas se puede calcular con la fórmula

$$\text{número de casillas} = 2^n$$

en donde n es el número de variables. Así a una expresión de 2 variables le corresponderá un mapa de 4 casillas, a una de 3 variables un mapa de 8 casillas y así sucesivamente.

Un minitérmino es aquel que forma parte de la expresión y que se puede escribir de la manera más simple formando lo que se conoce en álgebra elemental como un monomio.

Por ejemplo, la expresión

$$F = X'Y + XY$$

consta de dos minitérminos, X'Y y XY, y como se muestra a continuación en las casillas respectivas de la tabla correspondiente se pone un 1 si el minitérmino se encuentra en la expresión o un 0 si no está:

X \ Y	0	1
0	0	1
1	0	1

Para simplificar la expresión, en la tabla se agrupan los 1 de casillas adyacentes en bloques cuadrados o rectangulares de 2, 4, 8, 16,..., 2^n y se descartan las variables cuyo valor, 1 o 0, cambia de una casilla a otra. La regla es agrupar la información con el menor número posible de bloques ya que de cada bloque se obtiene cuando menos una literal y los bloques deben estar conformados por el mayor número de casillas ya que entre más grande sea el número de casillas agrupadas por un bloque, más simple será la expresión booleana resultante.

En el mapa anterior la variable X no conserva su valor ya que en la primera línea vale 0 y en la segunda 1, por lo tanto se elimina. Sin embargo Y mantiene el valor de 1 en ambas casillas, ya que en este caso el bloque que agrupa la información se encuentra solamente en la columna de la derecha. De esta forma se obtiene que la expresión simplificada del mapa de Karnaugh es F = Y.

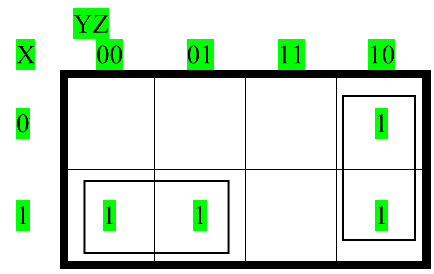
Como se ve, la simplificación anterior consiste en la aplicación de los postulados del álgebra booleana, pero de manera gráfica.

Para simplificar una expresión que incluye tres variables se tiene que el mapa consta de 8 casillas. Hay que observar que la secuencia en que se coloca la expresión en la tabla no es la binaria ascendente, sino una de forma que solamente exista un cambio de 0 a 1 o de 1 a 0 a la vez, esto es, una en la que no debe cambiar mas que un bit en cada paso. A esta forma de arreglar los bits se le llama código reflejado.

Ejemplo 1. Representar en un mapa de Karnaugh y determinar la expresión booleana simplificada de:

$$F = XY'Z' + XY'Z + XYZ' + X'YZ'$$

La solución es la siguiente:



En este caso se forman dos bloques, mismos que permiten eliminar una variable en cada uno de ellos de forma que la expresión simplificada es

$$F = XY' + YZ'$$

En general se tiene que cuando el número de variables que integran la expresión booleana es impar, el número de filas del mapa es menor que el número de columnas. También es conveniente ordenar las variables alfabéticamente colocando las primeras variables como filas y las restantes como columnas.

Ejemplo 2. Como se muestra en el siguiente mapa, un 1 de una celda puede estar contenido en más de un bloque.

X \ YZ	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	1

En el caso de esta tabla se tiene que la expresión booleana sin simplificar es

$$F = X'Y'Z + X'YZ + XY'Z + XYZ + XYZ'$$

la cual ya simplificada queda como

$$F = Z + XY$$

En el ejemplo anterior se formaron dos bloques, y en el mayor se eliminaron las variables X, Y debido a que de una casilla a otra cambian de valor. Además se observa que entre más grande sea el bloque, la expresión resultante es menor.

Si en un mapa de Karnaugh se unen los dos extremos, ya sea horizontal o verticalmente, entonces las celdas de las esquinas del mismo quedarán juntas y por lo tanto se considerarán como celdas adyacentes. Esto permite realizar una mejor simplificación.

Ejemplo 3. Simplificar la siguiente expresión booleana:

$$F = W'X' + W'XY'Z + W'XYZ + WXY'Z' + WX'Y'Z' + WX'YZ'$$

Como se ve, no siempre la expresión original tiene todas las variables en cada uno de sus minitérminos. En donde es así, el minitérmino equivale a las variables que se dan inicialmente, en este caso W'X' juntamente con todas las posibles combinaciones de las variables faltantes:

$$W'X' = W'X'YZ + W'X'Y'Z + W'X'Y'Z' + W'X'YZ'$$

Después se colocan los unos en las celdas correspondientes y se procede a realizar la agrupación y simplificación de los bloques.

WX \ YZ	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	
11	1			
10	1			1

Hay que observar cómo cada uno de los bloques tiene cuando menos un 1 que es exclusivo de él. Además se tienen dos bloques de 4 celdas adyacentes, uno de ellos enmarcado en un cuadrado mientras que al otro lo conforman las esquinas del mapa, y en cada uno de ellos se eliminan 2 variables. Aparte de esto, se tiene un pequeño bloque de dos celdas.

La función simplificada queda como sigue:

$$F = \underbrace{X'Z'}_{\text{Del bloque de las esquinas}} + \underbrace{W'Z}_{\text{Del cuadrado de 4 celdas}} + \underbrace{WY'Z'}_{\text{Del bloque de 2 celdas}}$$

Ejemplo 4. Usando mapas de Karnaugh es posible simplificar la expresión booleana

F = A′B′C′D + A′B′CD + AB′C′D + AB′CD + AB′CD′

que resultó del problema de la embotelladora planteado al principio del capítulo.

En este caso se tiene la siguiente tabla:

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01				
11				
10		1	1	1

La expresión simplificada es

F = B′D + AB′C

Ejemplo 5. Simplificar la expresión booleana

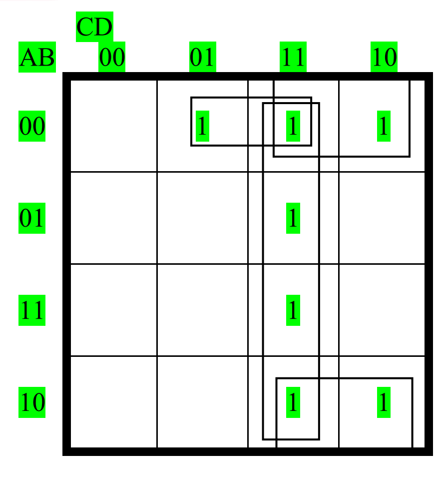
$$F = A'B'C'D + A'B'C + CD + AB'CD + AB'CD'$$

y obtener la expresión simplificada en sumas de productos y en productos de sumas.

Primero que nada se sabe que:

$$A'B'C = A'B'CD' + A'B'CD$$
$$CD = A'B'CD + A'BCD + ABCD + AB'CD$$

Usando la información, tanto los minitérminos que se complementaron con variables como los inicialmente completos, se tiene el siguiente mapa de Karnaugh:



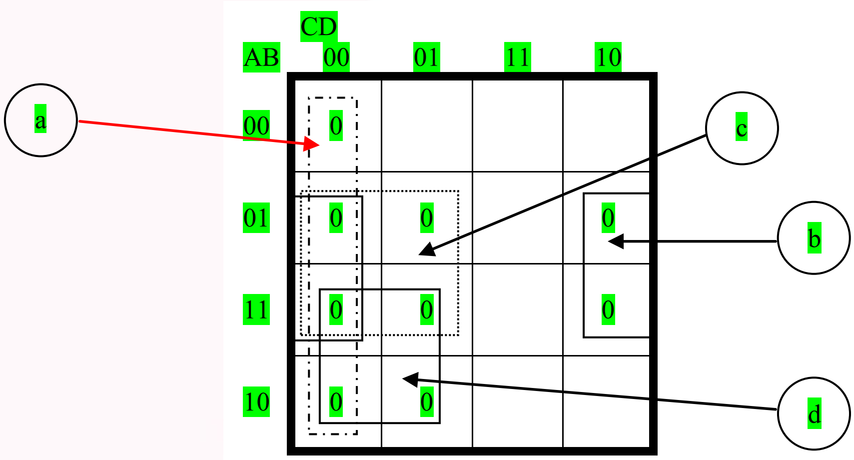
Hay que observar cómo un 1 puede estar considerado en diferentes bloques, como ocurre con el que está en la posición 0011.

En este mapa se tienen nuevamente 3 bloques, 2 de cuatro celdas y 1 de dos. Eliminando las que cambian de valor de una celda a otra se tiene que

$$F = B'C + CD + A'B'D$$

Esta es la expresión booleana simplificada en sumas de productos.

En el caso del "producto de sumas" se utiliza el mismo mapa de Karnaugh, pero en las celdas vacías se colocan ceros y se agrupa la información de manera semejante a cuando se tienen unos, como se muestra en el siguiente mapa:



La información se agrupó en este caso en cuatro bloques de 4 celdas cada uno de ellos, y para evitar confusiones en su lectura se le asignó una letra a cada bloque de tal forma que se obtiene la siguiente expresión complemento debido a que se usaron las celdas de ceros y no las de unos:

$$F' = C'D' + BD' + BC' + AC'$$

El asignarle una letra o número a un bloque permite ordenar mejor el resultado de tal forma que el primer término C'D' es la lectura del bloque "a", BD' lo es del bloque "b" y así sucesivamente. El orden en que se asigne la letra no es importante, ya que puede variar de persona a persona.

Complementando ambos miembros de la expresión booleana resulta que

$$(F')' = (C'D' + BD' + BC' + AC')'$$

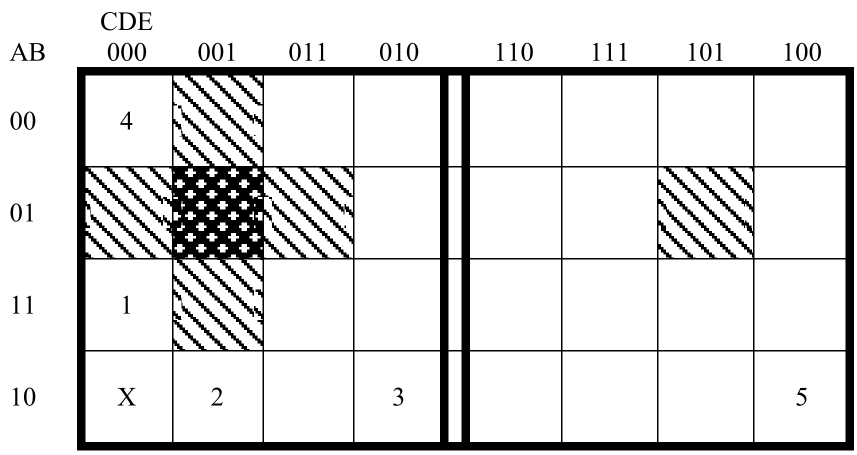
Aplicando ahora la ley de De Morgan:

$$F = (C + D)\ (B' + D)\ (B' + C)\ (A' + C)$$

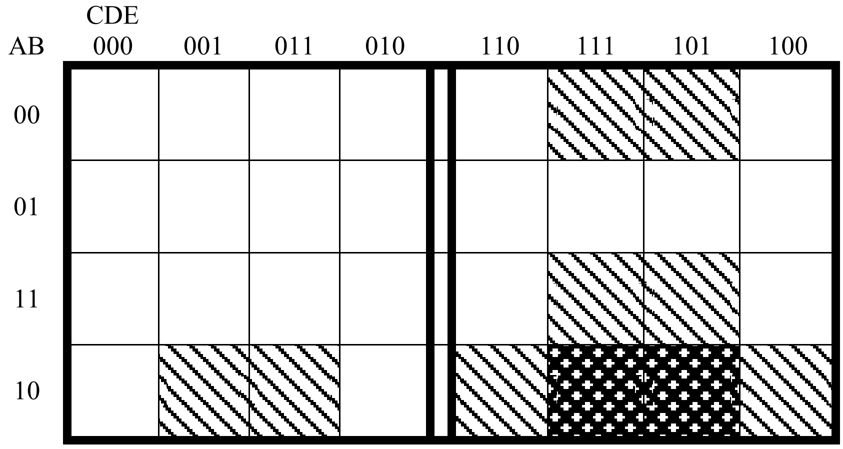
Esta es la expresión booleana simplificada en productos de sumas.

Hay que observar que no es igual la expresión booleana simplificada en sumas de productos que la que se obtuvo en productos de sumas, sin embargo se puede decir que son lógicamente equivalentes. Esto se puede demostrar usando teoremas del álgebra booleana o bien elaborando las tablas de verdad correspondientes.

A medida que crece el número de variables de la expresión booleana, se hace más complicado el mapa de Karnaugh ya que el número de celdas está dado por 2^n. Un mapa de 5 variables es equivalente a dos mapas de 4, como se muestra a continuación.

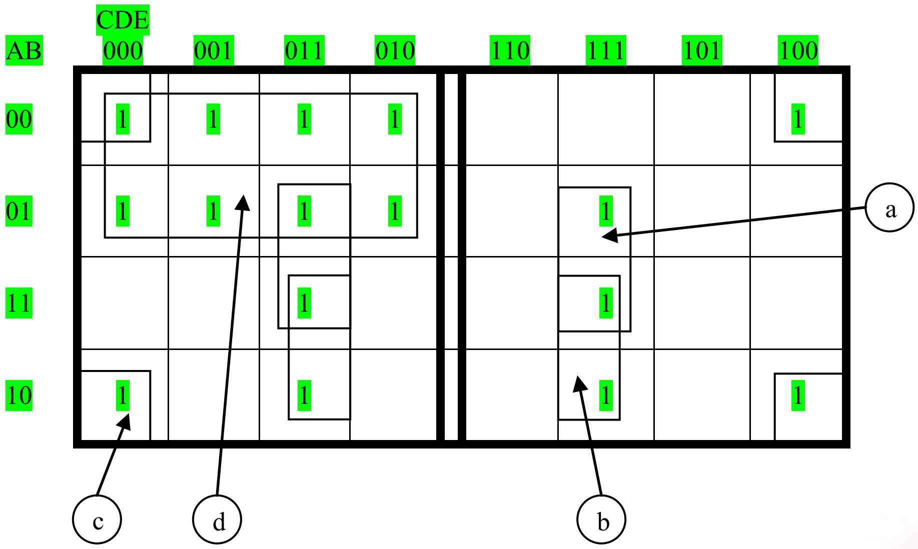


Cuando crece el mapa, también se ve incrementada la cantidad de celdas adyacentes para agrupar la información. Por ejemplo, en un mapa de 4 variables una celda es adyacente a 4 celdas, mientras que en un mapa de 5 variables cada celda tiene 5 celdas adyacentes y así sucesivamente. En el mapa anterior la celda con sombreado oscuro es adyacente a las 5 celdas con sombreado más claro, la celda con la letra X es adyacente a las celdas numeradas con 1, 2, 3, 4, 5, de tal manera que cada celda se puede agrupar para formar un bloque de dos casillas, con cinco celdas más.



En el mapa anterior el par de celdas con sombreado oscuro se pueden agrupar con las celdas de sombreado claro para formar un bloque de 4 casillas. Obsérvese cómo la frontera entre los dos mapas de 4 actúa como espejo.

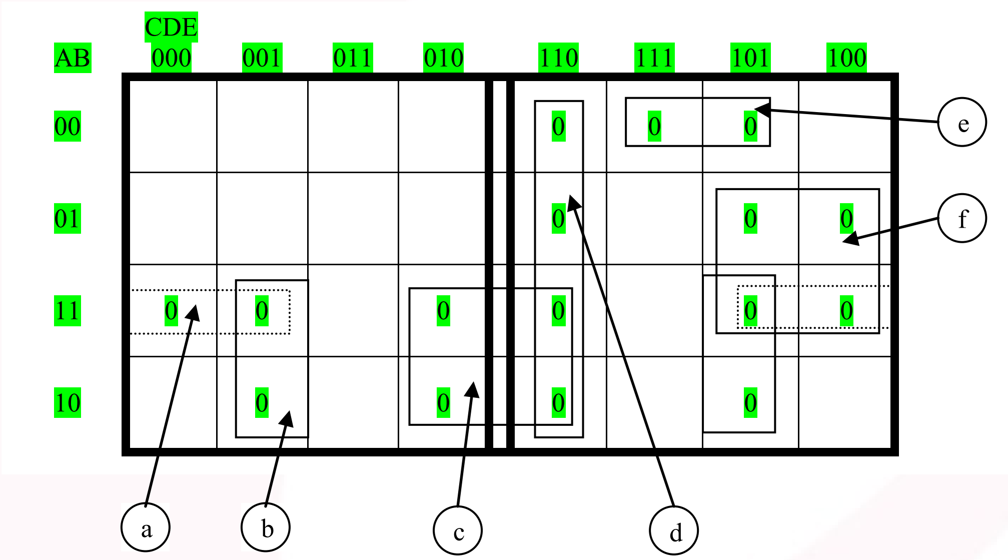
Ejemplo 6. Considérese el siguiente mapa de Karnauhg, y a partir de él determínese la expresión booleana simplificada en sumas de productos y productos de sumas.



Primero se tiene que la expresión booleana simplificada en sumas de productos es

$$F = BDE + ADE + B'D'E' + A'C'$$

Para obtener la expresión booleana simplificada en productos de sumas se ponen ceros en las celdas vacías, se agrupa la información en bloques y se hace la lectura correspondiente.



La expresión booleana que se lee a partir de la tabla es

$$F' = ABD' + AD'E + ADE' + CDE' + A'B'CE + BCD'$$

Complementado ambos miembros de la igualdad y aplicando la ley de De Morgan se tiene finalmente que

$$F = (A' + B' + D)(A' + D + E')(A' + D' + E)(C' + D' + E)(A + B + C' + E')(B' + C' + D)$$

El mapa de seis variables se divide en 4 mapas de cuatro variables. Cada una de las celdas es adyacente a 6 casillas con las mismas reglas ya conocidas.

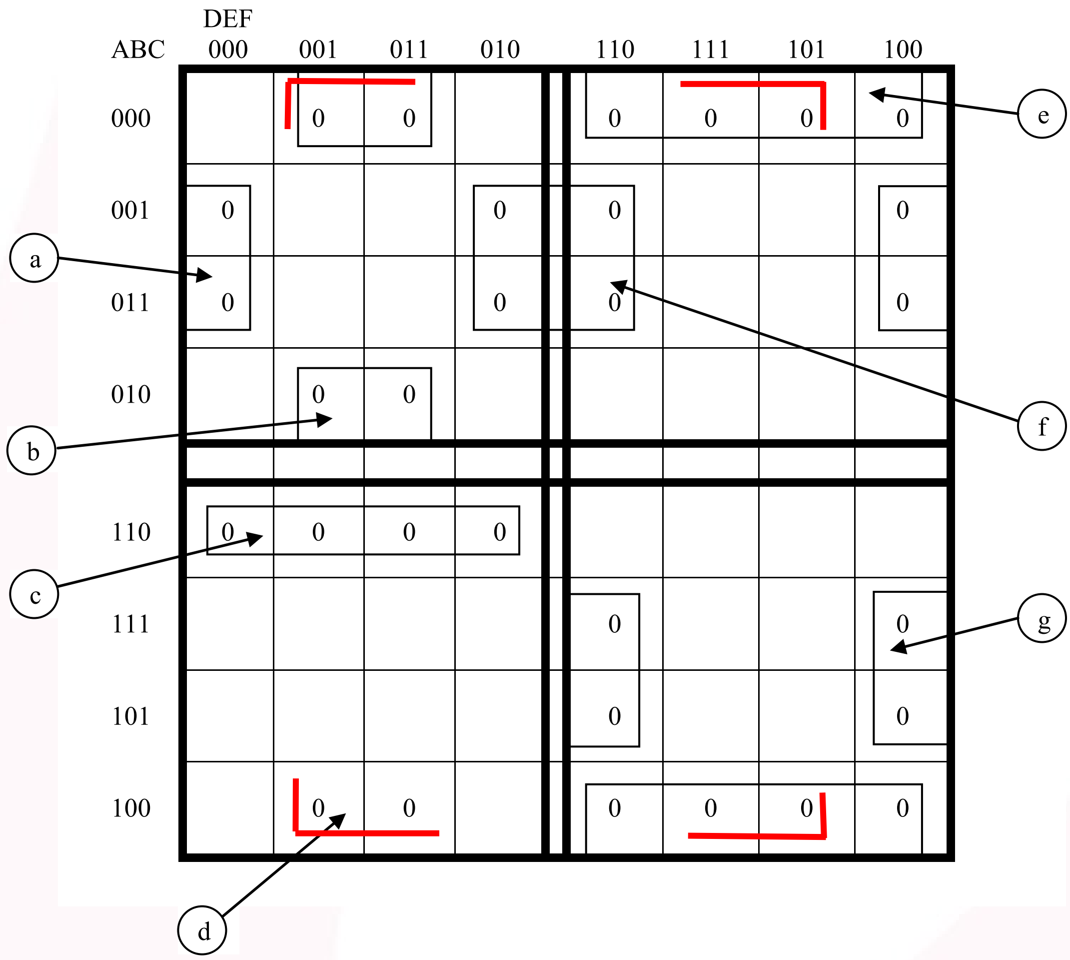
Ejemplo 7. Considérese el siguiente mapa de Karnaugh y determínese la expresión booleana más simple en sumas de productos y productos de sumas.

ABC \ DEF	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1			1				
001		1	1			1	1	
011		1	1			1	1	
010	1			1	1	1	1	1
110					1	1	1	1
111	1	1	1	1		1	1	
101	1	1	1	1		1	1	
100	1			1				

Se tiene que la expresión booleana simplificada en sumas de productos es:

$$F = A'C'D'F' + ACD' + B'C'D'F' + BC'D + CF$$

Para obtener la expresión de productos de sumas se tiene la tabla siguiente



A partir del mapa de Karnaugh se tiene la expresión

F′ = A′CE′F′ + A′C′D′F + ABC′D′ + B′C′F + B′C′D + A′CEF′ + ACDF′

Complementando ambos miembros de la igualdad y aplicando la ley de De Morgan resulta que

F = (A + C′ + E + F)(A + C + D + F′)(A′ + B′ + C + D)(B + C + F′)(B + C + D′)(A + C′ + E′ + F)(A′ + C′ + D′ + F)

En algunos mapas de Karnaugh la solución no es única, ya que a veces la información se puede agrupar de manera diferente. Lo que importa al simplificar es obtener la expresión booleana simplificada óptima, independientemente de qué variables son eliminadas. Esto mismo puede suceder con los teoremas del álgebra booleana.

Problemas

1. Simplificar las siguientes expresiones booleanas usando los teoremas del álgebra booleana y verificar los resultados por medio de mapas de Karnaugh.

a) F = A'B'C'D' + A'B'CD + A'B'CD' + A'BC'D + A'BCD + A'BCD' + ABCD + ABCD' + AB'C'D' + AB'CD'

b) F = W'X'Y'Z' + W'X'YZ + WXY'Z + WXYZ + WX'Y'Z' + WX'Y'Z + WX'YZ + WX'YZ' + W'XY'Z'

c) F = W'X'Y'Z + W'XY'Z' + W'XYZ + W'XYZ' + WXY'Z + WXYZ + WXYZ'

d) F = A'B'C'D' + A'B'CD' + A'BC'D' + A'BCD' + ABC'D' + ABCD + ABCD' + AB'CD + AB'CD'

e) F = A'B'C'D' + A'B'CD + A'B'CD' + A'BC'D + A'BCD + A'BCD' + ABCD + ABCD' + AB'C'D' + AB'CD'

f) F = B'CD + ABC + A'BD' + ABC'D' + AB'C'D

g) F = A'BC + BC'D' + ABC + AB'C'D' + AB'CD

2. En cada uno de los siguientes incisos obtener la expresión booleana simplificada en sumas de productos y en productos de sumas. Plantear el mapa y la agrupación correspondiente.

a)

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1						
01	1	1			1	1	1	
11		1	1			1	1	1
10							1	1

b)

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	1	1	1	1	1	
01	1						1	1
11	1	1	1				1	1
10		1			1	1		

c)

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1					1	
01			1	1	1	1		1
11	1	1	1	1	1		1	1
10			1				1	

d)

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00				1			1	1
01	1			1				
11	1	1		1			1	1
10	1	1					1	1

e)

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00				1	1			
01		1	1			1		1
11	1		1			1	1	1
10				1	1	1	1	