Funciones generadoras de probabilidad

por

Ramón Espinosa Armenta

En este artículo veremos cómo utilizar funciones generadoras en teoría de la probabilidad.

Sea Ω un conjunto finito o numerable de resultados posibles de un experimento y sea p_k la probabilidad de que el resultado k ocurra. Por lo tanto $p_k \geq 0$, para toda $k = 0, 1, 2, \ldots$ y

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

La función generadora ordinaria

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$$

es llamada **función generadora de probabilidad**.

Ejemplo 1. Supongamos que un experimento consiste en lanzar una moneda justa. Entonces los resultados posibles son águila (A) o sol (S), con probabilidad $p_0 = 1/2$ de que ocurra A y probabilidad $p_1 = 1/2$ de que ocurra S. Por lo tanto la función generadora de probabilidad es

$$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}.$$

Observa que $P(1) = 1$. △

Ejemplo 2. Un **ensayo de Bernoulli** es un experimento cuyos resultados son aleatorios y se clasifican en dos categorías, llamadas "éxito" (E) y "fracaso" (F).

Un **proceso de Bernoulli** consiste en realizar repetidamente ensayos de Bernoulli independientes (es decir, el resultado no depende de otros resultados), pero idénticos (es decir, la probabilidad de éxito permanece constante ensayo tras ensayo). Por ejemplo, si $n = 7$ un resultado típico en un proceso de Bernoulli es EFFEFEE.

Si la probabilidad de éxito es p y la probabilidad de fracaso es $q = 1 - p$, entonces la probabilidad de que en n ensayos ocurran k éxitos es igual a

$$C(n, k)p^k q^{n-k}.$$

por lo tanto, la función generadora de probabilidad para el número de éxitos en n ensayos está dada por

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)p^k q^{n-k} x^k = (px + q)^n.$$

Como $P(1) = 1$, se sigue que

$$\sum_{k=0}^{n} C(n, k)p^k q^{n-k} = 1.$$

Ejemplo 3. Sea $\lambda > 0$. La **distribución de Poisson** con parámetro λ se define como

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Es claro que $p_k > 0$, para toda k, además

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

Muchos fenómenos aleatorios se pueden modelar como una distribución Poisson, por ejemplo, el número de átomos de una sustancia radiactiva que se desintegran en una unidad de intervalo de tiempo o el número de llamada que llegan a una central telefónica en una unidad de intervalo de tiempo[1].

[1] La distribución Poisson fue descubierta por el matemático francés Siméon Denis Poisson en 1838

La función generadora de probabilidad para la distribución Poisson con parámetro λ es igual a

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} x^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}.$$

$\triangle$

Esperanza

Supongamos que en un experimento si el k-ésimo resultado ocurre, obtenemos k unidades monetarias. Entonces la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k$$

representa lo que esperaríamos ganar en promedio, si el experimento se repite muchas veces. Si la serie converge a un número E, este número es llamado el **valor esperado** o **esperanza**. El siguiente teorema muestra cómo utilizar funciones generadoras de probabilidad para calcular la esperanza.

Teorema 1. *Si $P(x)$ es la función generadora de probabilidad de la sucesión (p_k) y si el valor esperado E existe, entonces $P'(1) = E$.*

Demostración. Por hipótesis

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k,$$

de ahí que

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k x^{k-1},$$

por lo tanto

$$P'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = E.$$

$\square$

Ejemplo 4. Consideremos el experimento de lanzar una moneda justa. Por lo tanto $P(x) = 1/2 + x/2$ de ahí que $P'(x) = 1/2$. De ahí que $E = 1/2$. $\triangle$

Ejemplo 5. Consideremos un proceso de Bernoulli. Por lo tanto

$$P(x) = (px + q)^n,$$

de ahí que

$$P'(x) = n(px + q)^{n-1}p,$$

y por lo tanto

$$E = P'(1) = n(p + q)^{n-1}p = np.$$

$\triangle$

Ejemplo 6. Consideremos una distribución Poisson. Por lo tanto

$$P(x) = e^{\lambda(x-1)},$$

de ahí que

$$P'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)},$$

y por lo tanto $E = P'(1) = \lambda$. $\triangle$

Varianza

Consideremos un experimento donde $p_1 = 1$ y $p_k = 0$, para toda $k \neq 1$. Por lo tanto la esperanza es igual a 1. Supongamos ahora que tenemos otro experimento donde $p_0 = 1/2$, $p_2 = 1/2$ y $p_k = 0$, para cualquier otra k, entonces también la esperanza es igual a 1. Sin embargo, es claro que hay más variación en los resultados del segundo experimento. Para medir esta variación, los probabilistas han introducido el concepto de varianza.

Consideremos un experimento en el cual el k-ésimo resultado tiene valor k. La **varianza** V se define como

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} k p_k \right)^2,$$

siempre y cuando las series de la derecha converjan.

En el primer experimento que acabamos de describir la varianza es cero, y en el segundo experimento la varianza es 1. El siguiente teorema muestra cómo utilizar funciones generadoras de probabilidad para calcular la varianza.

Teorema 2. *Si $P(x)$ es la función generadora de probabilidad de la sucesión (p_k), si k-ésimo resultado tiene valor k y si la varianza V existe, entonces*

$$V = P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2.$$

Demostración.

$$P''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k x^{k-2},$$

de ahí que

$$P''(1) + P'(1) - [P'(1)]^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k + \sum_{k=1}^{\infty} kp_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} kp_k\right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} kp_k\right)^2 = V.$$

□

Ejemplo 7. Consideremos el experimento de lanzar una moneda justa. Por lo tanto $P''(x) = 0$. De ahí que

$$V = 0 + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}.$$

△

Ejemplo 8. Consideremos un proceso de Bernoulli. Por lo tanto

$$P''(x) = n(n-1)(px+q)^n p^2,$$

de ahí que

$$V = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq.$$

△

Ejemplo 9. Consideremos una distribución Poisson. Por lo tanto

$$P''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)},$$

de ahí que $V = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$. △