SOBRE LA INDUCCIÓN MATEMÁTICA

1. **DEDUCCIÓN E INDUCCIÓN.**
2. **LOS CONJUNTOS INDUCTIVOS.**
3. **EL MÉTODO DE INDUCCIÓN.**
4. **EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO.**
5. **LA INDUCCIÓN Y LA GEOMETRÍA.**
6. **REFERENCIAS.**

-----oo0oo-----

1. DEDUCCIÓN E INDUCCIÓN

Cuando emitimos una afirmación o proposición podemos intentar clasificarla en el conjunto de las proposiciones generales, en donde interviene una afirmación del tipo de "para todo elemento de ...", o bien en el conjunto de las proposiciones particulares en donde la afirmación se refiere "al elemento tal de ...".

De la certeza de una proposición general se puede pasar a la certeza de las correspondientes proposiciones particulares, y, al revés, de la certeza de una o varias proposiciones particulares se puede pasar a la certeza de la correspondiente proposición general o generalización.

El paso de un tipo de proposición a otra requiere un proceso de razonamiento lógico que en general se denomina deducción si se trata del paso de una proposición general a una o más proposiciones particulares, o inducción, cuando realizamos el paso de una o varias proposiciones particulares a una proposición general.

Si decimos que "todos los números enteros pares son divisibles por 2" estamos exponiendo una proposición general, de la que es particularización, por ejemplo, la proposición "el número 246 es divisible por 2".

El proceso por el cual, conocida la verificación de la proposición general, inferimos que se verifica la proposición particular correspondiente, es lo que entendemos por deducción o proceso deductivo.

Por otra parte, cuando desde la verificación de una o varias proposiciones particulares inferimos que se verifica una proposición general que las engloba, entendemos que estamos realizando un proceso de inducción o proceso inductivo.

Si, por ejemplo, aceptamos como cierta la proposición general de que "todos los suecos son rubios", la veracidad de la afirmación correspondiente a la particularización: "Gustav es sueco y por consiguiente rubio" es un proceso de deducción. Evidentemente, la certeza depende de que sea cierta la proposición general de la que se ha partido.

En cambio, el proceso contrario, en el que partiríamos de la veracidad de la afirmación "Gustav es sueco y rubio" no nos permitiría afirmar la veracidad de la proposición general "Todos los suecos son rubios". Ni tampoco negarla.

En general, pues, el proceso de inducción, por el que pasamos de una o varias afirmaciones particulares a una afirmación generalizadora, no es tan sencillo. ¿Cómo podríamos realizarlo de una forma segura?.

2. LOS CONJUNTOS INDUCTIVOS:

En la Axiomática de la Teoría de Conjuntos, en particular en el Sistema Axiomático de Neumann-Bernays-Godel-Quine (N-B-G-Q) se establece el Axioma de Infinitud:

$$(\exists x)(Cx \wedge Inducx)$$

“Existe al menos un conjunto de clases inductivas, esto es, de clases tales que contener un elemento implica contener a su elemento siguiente”. Tal familia es admitida, pues, como no vacía.

Los números naturales pueden ser introducidos con un conjunto N de clase inductiva, como el mínimo conjunto inductivo. Se introduce el concepto de número ordinal y se prueba que cualquier número natural es un número ordinal.

Peano (Giuseppe Peano, Cuneo-Piamonte, 1858 – Turín, 1932) introdujo los números naturales mediante un sencillo teorema consistente en cinco afirmaciones denominadas Postulado de Peano o Axiomas de Peano para los números naturales, que permiten, pues, estructurar algébricamente el conjunto N. Así, puede definirse el conjunto *N* como un conjunto que verifica las siguientes condiciones axiomáticas:

1) Existe al menos un número natural, que llamaremos cero y designaremos por 0.

$$\exists 0 \in N$$

2) Existe una aplicación $s : N \to N$ llamada *aplicación siguiente* que aplica todo elemento n de N en otro elemento n* de N, llamado *sucesor o siguiente de n.*

$$\exists s : N \to N / \forall n \in N, s(n) = n^* \in N$$

3) El cero no es sucesor de ningún otro elemento de N.

$$\forall n \in N, s(n) = n^* \neq 0$$

4) Dos elementos de N distintos no tienen igual sucesor, o sea, la aplicación siguiente es inyectiva.

$$\forall n, n' \in N, \quad s(n) = s(n') \Rightarrow n = n'$$

5) Todo subconjunto N’ de N, para el cual se verifique que contenga al cero, y que el sucesor de cualquier elemento de N’ está en N’, coincide con N. (Axioma de la Inducción Completa).

$$(\forall N' \subset N)(0 \in N')(\forall a \in N' \Rightarrow a^* \in N') \to N' = N$$

3. EL METODO DE INDUCCIÓN:

La última afirmación del Teorema Peano, también llamada *Axioma de la Inducción Completa* permite probar resultados con los números naturales generalizando situaciones particulares.

Si, en efecto, logramos evidenciar que una propiedad que se verifica para un número natural *n* se verifica también para su sucesor, *s(n)*, cualquiera que sea n, entonces podemos afirmar que tal propiedad se verifica desde e incluyendo *n* hasta el infinito. Si sabemos, además, que se verifica para el cero, el primero de los números naturales, que no es sucesor de ningún otro, entonces hay que concluir que la propiedad se verifica en todo *N*. Es decir, para probar que algo, una propiedad, se cumple en todos los números naturales, basta comprobar primero que se cumple para el 0, y, a continuación, suponer que se cumple para un natural n, y, desde aquí, deducir que se ha de cumplir para el natural siguiente, n+1.

Una técnica muy sencilla consiste en definir un conjunto *N’*, subconjunto de *N*, formado por los elementos que verifican la propiedad a demostrar. Si logramos demostrar que para cualquier elemento a∈N’ se cumple que su sucesor *s(a) ÎN’, y que el cero, 0ÎN’, es decir, se cumple (en el argot del sistema N-B-G-Q) que N’ es inductivo,* entonces habrá de concluirse que se verifica la propiedad en todo *N*, esto es, que *N’ = N*

El método, en definitiva, consta de dos partes o teoremas parciales:

Teorema 1, o base de la demostración: es la demostración deductiva de que la proposición se verifica para algún número natural dado a:

Proposición----→ f(a) cierta

Teorema 2, o paso de inducción, que es la demostración, de carácter también deductivo, de que si la proposición se supone cierta para un número natural n, también ha de ser cierta para el número sucesor de n, es decir, para el número n + 1.

Proposición ----→ f(n) cierta ⇒ f(n+1) cierta

De lo cual se infiere que la proposición es cierta para el número natural a y para todos los números naturales siguientes al número a, es decir es cierta para el conjunto de los números naturales $[a, \infty)$. Evidentemente, si a es el primero de los números naturales, la proposición será cierta para todo el conjunto N.

Ambos pasos parciales son, en último término, procesos deductivos, por lo que cabría decir que, realmente, el método de inducción matemática es, en realidad, un proceso de deducción.

En realidad, el nombre que le damos de “inducción matemática” se debe simplemente a que lo asociamos en nuestra consciencia con los razonamientos inductivos basados en las experiencias de verosimilitud de las ciencias naturales y sociales, a pesar de que el paso inductivo de la demostración es una proposición general que se demuestra como un riguroso proceso deductivo, sin necesidad de ninguna hipótesis particular. Es por esto por lo que también se le denomina “inducción perfecta” o “inducción completa”.

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO:

4.1. Demostración de que la suma de los n primeros números naturales viene dada por la expresión $\frac{n(n+1)}{2}$, o sea:

$$0+1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Proceso:

Teorema 1:

Para n=0: $0=\frac{0(0+1)}{2}=0$, se verifica

Para n=1: $0+1=\frac{1.(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$, se verifica

Teorema 2:

Sea cierta la expresión para n = k: $0+1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$

Y veamos que, entonces, ha de ser cierta para n = k+1:

$$0+1+2+...+k+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

En efecto:

$$0+1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

4.2. Demostración de la identidad siguiente:

$$\cos x.\cos(2x).\cos(4x)...\cos(2^n x)=\frac{sen(2^{n+1}x)}{2^{n+1}senx}$$

Proceso:

Teorema 1:

Para n = 0: $\cos(2^0 x)=\cos x=\frac{sen(2^{0+1}x)}{2^{0+1}senx}=\frac{sen(2x)}{2.senx}=\frac{2senx.\cos x}{2.senx}=\cos x$

Se verifica.

Teorema 2:

Sea cierta para n=k: $\cos x.\cos(2x).\cos(4x)...\cos(2^k x) = \dfrac{sen(2^{k+1}x)}{2^{k+1}senx}$

Y veamos que en este caso ha de ser cierta para n = k+1:

$$\cos x.\cos(2x).\cos(4x)...\cos(2^k x)\cos(2^{k+1}x) = \frac{sen(2^{k+2}x)}{2^{k+2}senx}$$

En efecto:

$$\cos x.\cos(2x).\cos(4x)...\cos(2^k x)\cos(2^{k+1}x) = \frac{sen(2^{k+1}x)}{2^{k+1}senx}.\cos(2^{k+1}x) =$$
$$= \frac{2.sen(2^{k+1}x).\cos(2^{k+1}x)}{2^{k+2}senx} = \frac{sen\left(2.2^{k+1}x\right)}{2^{k+2}senx} = \frac{sen(2^{k+2}x)}{2^{k+2}senx}$$

4.3. Indagación de cuáles son los números naturales para los que se verifica la desigualdad:

$$2^n > 2.n+1$$

Proceso:

Teorema 1:

Para n=0: $2^0 > 2.0+1=1$, no se verifica

Para n=1: $2^1 > 2.1+1=3$, no se verifica

Para n=2: $2^2 > 2.2+1=5$, no se verifica

Para n=3: $2^3 > 2.3+1=7$, se verifica

Teorema 2:

Sea cierta para n = K: $2^k > 2.k+1$

Y veamos, entonces, que también se verifica para n = k+1: $2^{k+1} > 2.(k+1)+1$

En efecto:

$$2^{k+1} = 2^k.2 > (2k+1).2 = 4k+2 = 2(k+1)+1+2k-1 > 2(k+1)+1$$

Lo cual es cierto para k >2. Así, pues, podemos afirmar que la proposición es cierta en el conjunto [3, ∞).

4.4. Demostración de que la expresión $a^{2n}-1$ es divisible por $a+1$.

Proceso:

Teorema 1:

Para n = 1: $a^{2.1}-1=a^2-1=(a-1).(a+1)$ es divisible por $a+1$. Se verifica

Teorema 2:

Sea cierta la proposición para n = k: $a^{2k}-1$ es divisible por $a+1$

Veamos entonces que también será cierta para n=k+1:

$a^{2(k+1)}-1$ es divisible por a+1.

En efecto:

$$a^{2(k+1)}-1=(a^{2k}-1)a^2+a^2-1=(a^{2k}-1)a^2+(a+1).(a-1)$$

El primer sumando es divisible por a+1 por hipótesis, y el segundo lo es porque contiene a (a+1) como factor.

Por consiguiente, $a^{2n}-1$ es divisible por a+1, para todo n>0

5. LA INDUCCIÓN Y LA GEOMETRÍA:

5.1. La aplicabilidad del método:

El método de inducción matemática tiene una particular aplicabilidad en la geometría plana y del espacio.

Aunque la aplicación más común del método en geometría es la dedicada a los procesos de resolución de problemas de cálculo, lo mismo, evidentemente, que en la teoría de números o en el Álgebra, es, sin embargo, muy utilizada la inducción matemática en la construcción de figuras geométricas de n elementos a partir de la figura análoga elemental mediante la generalización correspondiente. Es también muy utilizada la inducción en la determinación de lugares geométricos o en la generalización del número de dimensiones para obtener figuras análogas en mayor número de dimensiones (paso de la circunferencia a la esfera, por ejemplo).

5.2. Un ejemplo de aplicación de la inducción en problemas geométricos:

Veamos un ejemplo de tratamiento de un problema de geometría mediante un proceso de inducción matemática:

Supongamos que queremos determinar la longitud del lado de cada uno de los polígonos regulares de 2^m lados inscritos en una circunferencia de radio R.

Aclaremos que estos polígonos son:

Para m = 2: polígono de 2^2 = 4 lados (cuadrado).

Para m = 3: polígono de 2^3 = 8 lados (octágono regular)

Para m = 4: polígono de 2^4 = 16 lados (16-ágono regular)

Para m = 5: polígono de 2^5 = 32 lados (32-ágono regular)

Para m = n: polígono de 2^n lados (n-ágono regular)
… … … … … … … … … … … … … …
… … … … … … … … … … … … … …
La longitud del lado respectivo será l_2, l_3, l_4, l_5, …, l_n, …

Existe una fórmula que nos da la longitud del lado l_n en función del radio R de la circunferencia circunscrita al polígono de n lados:

$$l_n = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}} \qquad [0]$$

(donde aparece el 2 un total de n-1 veces)

Así, según esta expresión, para un cuadrado inscrito será: $l_2 = R\sqrt{2}$

Para un octágono regular inscrito: $l_3 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

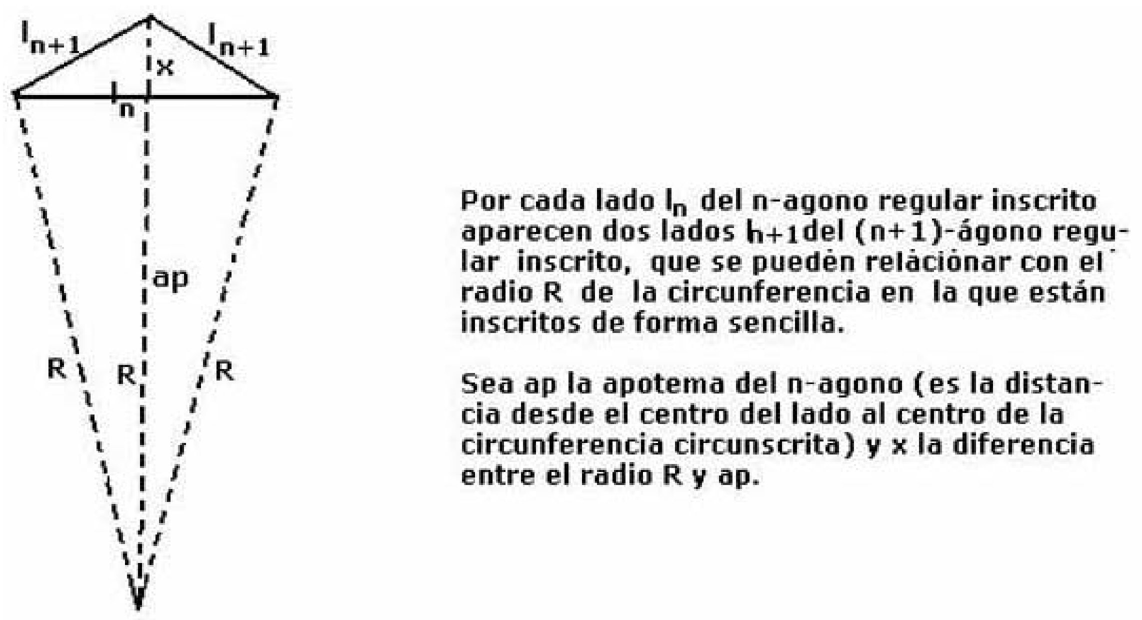
Para el 16-ágono regular inscrito: $l_4 = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Esta fórmula se podría demostrar por inducción matemática si conociéramos alguna manera de calcular el lado l_{n+1} del (n+1)-ágono regular inscrito en función del lado l_n del n-ágono regular inscrito. Esta manera nos la da la siguiente proposición:

Proposición: Se verifica que el lado del (n+1)-ágono regular inscrito y el lado del n-ágono regular inscrito se relacionan por la expresión

$$l_{n+1} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{l_n^{\,2}}{4}}}$$

Veamos una demostración de la proposición basada en el teorema de Pitágoras:



Si aplicamos el Teorema de Pitágoras al cálculo de x y ap, tenemos:

$$x^2 = l_{n+1}{}^2 - \frac{l_n^{\,2}}{4} \quad \text{y} \quad ap = \sqrt{R^2 - \frac{l_m^{\,2}}{4}} \qquad [1]$$

Asimismo es: x = R – ap, por lo que se tiene otra expresión para x^2:

$$x^2 = R^2 + ap^2 - 2R.ap \qquad [2]$$

por lo que, al sustituir [1] en [2] será:

$$x^2 = l_{n+1}{}^2 - \frac{l_n{}^2}{4} = R^2 + R^2 - \frac{l_n{}^2}{4} - 2.R.\sqrt{R^2 - \frac{l_n{}^2}{4}} \Rightarrow l_{n+1}{}^2 = 2.R^2 - 2.R.\sqrt{R^2 - \frac{l_n{}^2}{4}}$$

y, en definitiva: $$l_{n+1} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{l_n{}^2}{4}}}$$

Ya podemos, pues, intentar probar por inducción matemática la fórmula dada [0]:

Proceso:

Teorema 1:

Para n = 1: $l_{1+1} = l_2 = R.\sqrt{2}$, se verifica (es el lado del cuadrado de diagonal 2R)

Para n = 2:

$$l_{2+1} = l_3 = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{\left(R\sqrt{2}\right)^2}{4}}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{\frac{R^2}{2}}} = \sqrt{2R^2 - \frac{2R^2}{\sqrt{2}}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

que también verifica la fórmula.

Teorema 2:

Supongámosla cierta para n = k: $l_{k+1} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}$ (en donde el 2 está k-1 veces)

Veamos que se ha de verificar también para n = k+1:

$$l_{k+2} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}$$

(en donde el 2 está k veces)

En efecto:

$$l_{k+2} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{l_{k+1}{}^2}{4}}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{R^2(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + .. + \sqrt{2}}}}{4}}} =$$

$$= R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}$$

(donde el 2 está ahora k veces)

6. **REFERENCIAS:**

Libros:

1. **Gelbaum, B.R. and Olmsted, J.M.H.**, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, 1964
2. **Gelbaum, B.R. and Olmsted, J.M.H.**, *Theorems and Counterexamples in Mathematics*, Springer-Verlag, 1990
3. **Gödel, Kurt**, *Obras completas*. Alianza Editorial. 1981.
4. **Golovina, L.I. and Yaglom, I.M.**, *Induction in Geometry*, Mir Publishers, Moscú, 1979.
5. **Kleene, Stephen**. *Introducción a la metamatemática*. Editorial TECNOS. 1974.
6. **Sominski, I. S.**, *Método de Inducción Matemática,* Editorial Mir, Moscu, 1985

Páginas web en la red:

Sobre el origen del principio de inducción matemática:
http://www.panchonet.net/educacion/140induccion.htm

Ejercicios de inducción sobre estructuras numéricas:
http://www.eneayudas.cl/indmat.htm

Sobre el principio de inducción matemática:
http://elsanti.netfirms.com/principio.html

Problemas sobre teoría de números:
http://www.geocities.com/jespinos57/

Estudio de la inducción matemática (inglés):
http://www.cut-the-knot.com/induction.shtml

Mathematical Induction:
http://www.math.csusb.edu/notes/proofs/pfnot/node10.html