Universidad de Cádiz

Escuela Superior de Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Apuntes de Matemática Discreta

6. Relaciones

Francisco José González Gutiérrez

Cádiz, Octubre de 2004

Lección 6

Relaciones

Contenido

Las matemáticas aparecen como la ciencia que estudia las relaciones entre ciertos objetos abstractos.

Emile Borel

En esta lección estudiaremos algunas estructuras básicas que pueden representarse a través de la relación entre elementos de conjuntos. Las relaciones tienen una importancia fundamental tanto en la teoría como en las aplicaciones a la informática.

Una estructura de datos tales como una lista, una matriz o un árbol, se usan para representar conjuntos de elementos junto con una relación entre los mismos.

Las relaciones que son parte de un modelo matemático están a menudo implícitamente representadas por relaciones en una estructura de datos.

Aplicaciones numéricas, recuperación de información y problemas de redes son algunos ejemplos donde las relaciones ocurren como parte de la descripción del problema, y la manipulación de relaciones es importante en la resolución de procedimientos.

Las relaciones también juegan un importante papel en la teoría de computación, incluyendo estructuras de programas y análisis de algoritmos.

En esta lección desarrollaremos algunas de las herramientas fundamentales y los conceptos asociados a las relaciones.

6.1 Generalidades

Hemos estudiado ya dos relaciones importantes entre proposiciones: la implicación y la equivalencia. También hemos estudiado la relación de subconjunto para conjuntos. En álgebra y cálculo son importantes las relaciones entre variables; en geometría lo son las relaciones entre figuras. Hasta el momento no hemos necesitado una definición precisa de la palabra *relación*. Sin embargo, sin una definición formal es difícil responder preguntas sobre relaciones. ¿Qué se quiere dar a entender, por ejemplo, cuando se dice que dos relaciones aparentemente diferentes son iguales?

En la realidad que nos circunda existen relaciones entre elementos, entre conjuntos y entre elementos y conjuntos. Existen relaciones de parentesco, de amistad, de paisanaje, etc., entre personas; relaciones diplomáticas, económicas, etc., entre países; relaciones de paralelismo o de perpendicularidad entre rectas de un plano; relaciones de inclusión entre conjuntos; relaciones como "mayor que" o "menor o igual que" entre números, etc. La matemática intenta, como ahora veremos, hacerse eco de tales sucesos y, mediante un proceso de abstracción, expresarlas y estudiarlas científicamente.

6.1.1 Relación

Sean los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Una relación $\mathscr{R}$ sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ es cualquier subconjunto de este producto cartesiano, es decir,

$$\mathscr{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

Si $\mathscr{R} = \emptyset$, llamaremos a $\mathscr{R}$, la relación vacía.

Si $\mathscr{R} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, llamaremos a $\mathscr{R}$ la relación universal.

Si $A_i = A, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\mathscr{R}$ es una relación n-aria sobre A.

Si $n = 2$, diremos que $\mathscr{R}$ es una relación binaria y si $n = 3$, una relación ternaria.

6.1.2 Igualdad de Relaciones

Sean $\mathscr{R}_1$ una relación n-aria sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ y $\mathscr{R}_2$ una relación n-aria sobre $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m$. Entonces $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2$ si, y sólo si $n = m$ y $A_i = B_i, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$ y $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ son conjuntos de n-tuplas ordenadas iguales.

6.2 Relaciones Binarias

La clase más importante de relaciones es la de las relaciones binarias. Debido a que este tipo de relaciones son las más frecuentes, el término "*relación*" denota generalmente una relación binaria; adoptaremos este criterio cuando no haya confusión y especificaremos las que no sean binarias con términos tales como "ternaria" o "n-aria".

Si $(a, b) \in \mathscr{R}$ diremos que a está relacionado con b y lo notaremos por $a\mathscr{R}b$.

Si $(a, b) \notin \mathscr{R}$, escribiremos $a \not\mathscr{R} b$ y diremos que a no está relacionado con b.

Ejemplo 6.1 Sea $A = \{\text{huevos, leche, maíz}\}$ y $B = \{\text{vacas, cabras, gallinas}\}$. Escribir la relación $\mathscr{R}$ de A a B definida por:

$$(a, b) \in \mathscr{R} \Longleftrightarrow a \text{ es producido por } b$$

Solución

La relación sería:

$$\mathscr{R} = \{(\text{huevos,gallinas}),(\text{leche,vacas}),(\text{leche,cabras})\}$$

Ejemplo 6.2

(a) Sea $\mathscr{R}$ la relación "menor que" definida en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

Escribiremos $3 < 5$ para indicar que $(3, 5) \in \mathscr{R}$ y $5 \nless 3$ para indicar que $(3, 5) \notin \mathscr{R}$

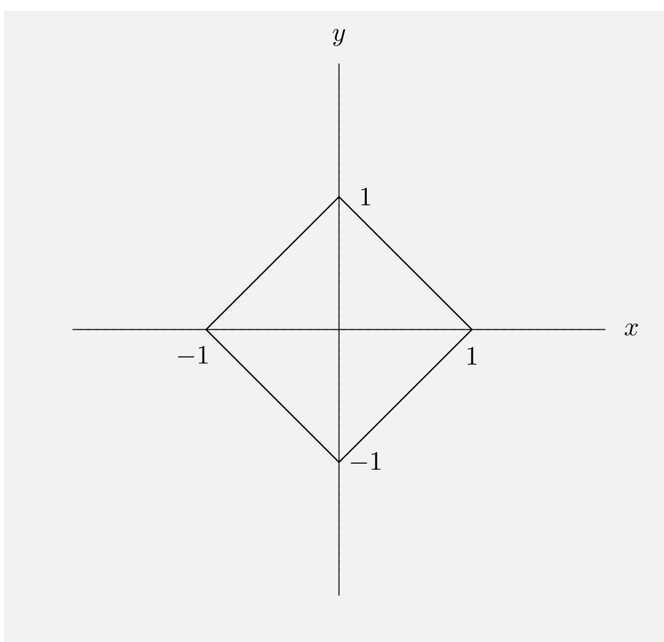
(b) Sea $\mathscr{R}$ la relación "es un múltiplo de" en el conjunto de los enteros positivos.

Entonces, $4\mathscr{R}2$ pero $2\not\mathscr{R}4$. Más generalmente, $x\mathscr{R}y$ si, y sólo si $x = ky$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$. Así para todo x, $x\mathscr{R}1$. Si $p > 1$, entonces p es primo si $x\mathscr{R}p$ implica que $x = 1$ ó $x = p$. Un número x es impar si $x\not\mathscr{R}2$.

(c) Cuando un compilador traduce un programa informático construye una tabla de símbolos que contiene los nombres de los símbolos presentes en el programa, los atributos asociados a cada nombre y las sentencias de programa en las que están presentes cada uno de los nombres. Así pues, si S es el conjunto de los símbolos, A es el conjunto de los posibles atributos y P es el conjunto de las sentencias de programa, entonces la tabla de símbolos incluye información representada por las relaciones binarias de S a A y de S a P.

(d) Como dijimos anteriormente, una relación binaria sobre el conjunto de los números reales puede representarse gráficamente en el plano cartesiano. La figura siguiente es la gráfica de la relación

$$\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| + |y| = 1\}$$



$|x| + |y| = 1$

Ejemplo 6.3 Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $\mathscr{R} = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$. $\mathscr{R}$ es una relación en A ya que es un subconjunto de $A \times A$. Con respecto a esta relación, tendremos que

$$1\mathscr{R}2,\ 1\mathscr{R}3,\ 3\mathscr{R}2,\ \text{pero } 1\not\mathscr{R}\,1,\ 2\not\mathscr{R}\,1,\ 2\not\mathscr{R}\,2,\ 2\not\mathscr{R}\,3,\ 3\not\mathscr{R}\,1,\ 3\not\mathscr{R}\,3$$

6.2.1 Dominio e Imagen

Llamaremos dominio de una relación $\mathscr{R}$ al conjunto formado por todos los primeros elementos de los pares ordenados que pertenecen a $\mathscr{R}$, e imagen o rango al conjunto formado por los segundos elementos. Es decir, si $\mathscr{R}$ es una relación de A a B, entonces

$$\operatorname{Dom}(\mathscr{R}) = \{a \in A, \exists b : b \in B \ \wedge\ (a, b) \in \mathscr{R}\}$$
$$\operatorname{Img}(\mathscr{R}) = \{b \in B, \exists a : a \in A \ \wedge\ (a, b) \in \mathscr{R}\}$$

Así en el ejemplo anterior, el dominio de $\mathscr{R}$ es $\operatorname{Dom}(\mathscr{R}) = \{1, 3\}$ y la imagen $\operatorname{Img}(\mathscr{R}) = \{2, 3\}$

Ejemplo 6.4 Para los conjuntos $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, determinar:

(a) $|A \times B|$.

(b) El número de relaciones de A a B.

(c) El número de relaciones binarias en A.

(d) El número de relaciones de A a B que contengan al (1,2) y al (1,5).

(e) El número de relaciones de A a B que contengan exactamente cinco pares ordenados.

(f) El número de relaciones binarias en A que contengan siete elementos como mínimo.

<u>Solución</u>

(a) $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 3 = 9$

(b) Sea N el número de relaciones de A a B.

Como una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano de A por B, el número de relaciones de A a B será igual al número de subconjuntos que tenga $A \times B$, es decir, el número de elementos del conjunto de las partes de este conjunto, por tanto,

$$N = |\mathscr{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^9$$

(c) Igual que en el apartado anterior, si N es el número pedido, entonces

$$N = |\mathscr{P}(A \times A)| = 2^{|A \times A|} = 2^9$$

(d) Si eliminamos del producto cartesiano de A y B los pares (1,2) y (1,5), quedarán 7 pares, luego el número de posibles relaciones que pueden establecerse sin ellos será 2^7 igual al número N de relaciones que contienen a los dos pares dados ya que bastaría con añadirlos a cada una de las relaciones que no los tienen, por tanto,

$$N = 2^7$$

(e) Dos subconjuntos con cinco pares del producto cartesiano de A y B, serán distintos sólo si se diferencian en algún par sin que el orden en que los mismos figuren en el subconjunto influya para nada, por tanto, el número de subconjuntos de $A \times B$ con cinco pares será igual al de combinaciones de nueve elementos tomados cinco a cinco, es decir, si N es el número pedido, entonces

$$N = C_{9,5} = \binom{9}{5} = 126$$

(f) Sea N_i el número de relaciones que contienen i elementos y sea N el número pedido. Entonces,

$$N = N_7 + N_8 + N_9$$

y razonando igual que en el apartado anterior,

$$N_i = C_{9,i} = \binom{9}{i}$$

luego,

$$N = C_{9,7} + C_{9,8} + C_{9,9} = \binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 46$$

■

Ejemplo 6.5 Para $\mathscr{U} = \mathbb{Z}^+$, $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{10, 11, 12, 13, 14\}$, escribir los elementos de la relación $\mathscr{R} \subset A \times B$, donde

$$a\mathscr{R}b \text{ si y sólo si } a \text{ divide (exactamente) a } b.$$

Solución

$$\mathscr{R} = \{(2, 10), (2, 12), (2, 14), (3, 12), (4, 12), (5, 10), (6, 12), (7, 14)\}$$

■

6.3 Matriz de una Relación

En este apartado veremos una de las formas de representar una relación entre dos conjuntos finitos, como es su matriz booleana.

6.3.1 Definición

Dados dos conjuntos finitos, no vacíos,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \text{ y } B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

y una relación $\mathscr{R}$ cualquiera de A a B, llamaremos matriz de $\mathscr{R}$ a la matriz booleana siguiente:

$$M_{\mathscr{R}} = (r_{ij}) : r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (a_i, b_j) \in \mathscr{R} \\ 0, & \text{si } (a_i, b_j) \notin \mathscr{R} \end{cases}$$

donde $i = 1, 2, \ldots\ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$.

Directamente de la definición dada se deduce que la matriz de una relación binaria es cuadrada.

Ejemplo 6.6 Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y definimos la relación

$$a\mathscr{R}b \iff b \text{ es múltiplo de } a, \ \forall a, b \in A$$

Calcularemos la matriz de la relación $\mathscr{R}$.

Solución

La relación vendrá dada por el conjunto

$$\mathscr{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$$

y la matriz será, por tanto,

$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota 6.1

– Obsérvese que la matriz de una relación caracteriza a la misma, o sea, si se conoce la relación se conoce la matriz y si se conoce la matriz sabremos de que relación trata.

– Obsérvese también lo siguiente: si $M_{\mathscr{R}}$ es la matriz de una relación $\mathscr{R}$ de A a B, cada fila se corresponde con un elemento de A y cada columna con un elemento de B. Para calcular el dominio de $\mathscr{R}$ bastará ver en que filas hay, al menos, un uno y para calcular la imagen bastará con ver en que columnas hay, al menos, un uno.

En el ejemplo anterior,

$$\text{Dom}(\mathscr{R}) = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } \text{Img}(\mathscr{R}) = \{1, 2, 3, 4\}$$

Existe otra forma de representar una relación cuando es de un conjunto en si mismo, es decir, cuando la relación es binaria.

6.4 Grafo Dirigido de una Relación

Los grafos nos ofrecen una forma bastante conveniente de visualizar cuestiones relativas a una relación binaria. Por esta razón desarrollaremos algunos conceptos de grafos dirigidos paralelamente a nuestro tratamiento de las relaciones binarias.

6.4.1 Definición

Un grafo dirigido o digrafo es un par ordenado $D = (A, \mathscr{R})$ donde A es un conjunto finito y $\mathscr{R}$ es una relación binaria definida sobre A. Al conjunto A lo llamaremos conjunto de nodos o vértices de D. A los elementos de $\mathscr{R}$ los llamaremos arcos o aristas del digrafo D.

– Un grafo dirigido caracteriza a una relación, es decir, conociendo la relación se conoce el digrafo y conociendo el digrafo, puede establecerse la relación.

– Si $G_{\mathscr{R}}$ es el grafo dirigido de una relación en un conjunto finito A, entonces el dominio y la imagen de $\mathscr{R}$ están formados por los puntos que son, respectivamente, extremo inicial y final de algún arco.

6.4.2 Representación Gráfica de un Grafo Dirigido

Tomaremos los elementos de A como puntos del plano y cuando dos elementos x e y de A estén relacionados, es decir, $x\mathscr{R}y$, trazaremos un arco dirigido desde x hasta y.

A x lo llamaremos vértice inicial y al y, vértice final de la arista (x, y).

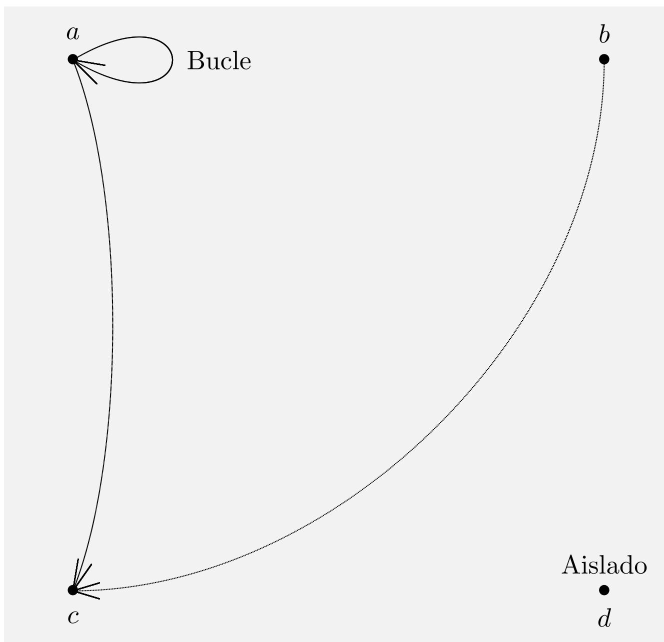
A una arista que una un punto consigo mismo, la llamaremos bucle.

A un vértice que no sea inicial ni final de ninguna arista, lo llamaremos aislado.

Grado de entrada de un vértice es el número de aristas que llegan hasta él. Representaremos por $gr_e(a)$ al del vértice a.

Grado de salida de un vértice es el número de aristas que salen de él. Representaremos por $gr_s(a)$ al del vértice a.

Ejemplo 6.7 En la figura mostramos una representación gráfica del digrafo $D = (A, \mathscr{R})$, siendo A el conjunto $\{a, b, c, d\}$ y $\mathscr{R} = \{(a, a), (a, c), (b, c)\}$.



Ejemplo 6.7

Las aristas son $(a, a), (a, c)$ y (b, c).

d es un vértice aislado.

Los grados de entrada son:

$$\text{gr}_e(a) = 1,\ \text{gr}_e(b) = 0,\ \text{gr}_e(c) = 2,\ \text{gr}_e(d) = 0$$

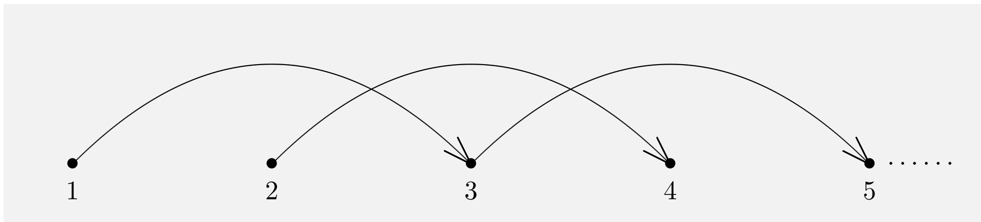
y los de salida,

$$\text{gr}_s(a) = 2,\ \text{gr}_s(b) = 1,\ \text{gr}_s(c) = 0,\ \text{gr}_s(d) = 0$$

Ejemplo 6.8 Representar gráficamente el digrafo $D = (\mathbb{Z}^+, \mathscr{R})$, donde $\mathscr{R}$ es la relación definida sobre el conjunto de los números naturales consistente en todos los pares de números de la forma $(x, x + 2)$.

Solución

$$\mathscr{R} = \left\{(x, x+2) : x \in \mathbb{Z}^+\right\}$$



Ejemplo 6.8

Como $\mathbb{Z}^+$ es un conjunto infinito, en la figura hemos hecho un diagrama que, necesariamente, es incompleto.

6.5 Propiedades de las Relaciones

Las relaciones binarias, es decir definidas sobre un único conjunto A, satisfacen ciertas propiedades que expondremos en este apartado.

6.5.1 Reflexividad

Una relación binaria $\mathscr{R}$ sobre un conjunto A se dice que es reflexiva, cuando cada elemento de A está relacionado consigo mismo. Es decir,

$$\mathscr{R} \text{ es reflexiva} \Longleftrightarrow \forall a\,(a \in A \Longrightarrow a\mathscr{R}a)$$

Nota 6.2 La equivalencia anterior,

$$\mathscr{R} \text{ es reflexiva} \Longleftrightarrow \forall a\,(a \in A \Longrightarrow a\mathscr{R}a)$$

puede escribirse también, en la forma:

$$\mathscr{R} \text{ es reflexiva} \Longleftrightarrow \forall a\,[\neg\,(a \in A) \;\vee\; a\mathscr{R}a]$$

y si ahora negamos ambos miembros, tendremos

$$\neg\,(\mathscr{R} \text{ es reflexiva}) \Longleftrightarrow \neg\forall a\,[\neg\,(a \in A) \;\vee\; a\mathscr{R}a]$$

es decir,

$$\mathscr{R} \text{ no es reflexiva} \Longleftrightarrow \exists a : \neg\,[(\neg\,(a \in A) \;\vee\; a\mathscr{R}a)]$$

luego,

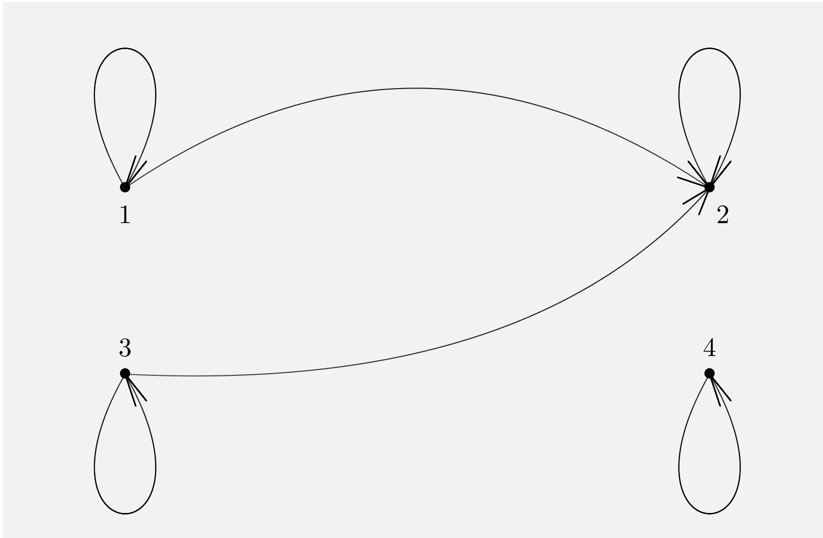
$$\mathscr{R} \text{ no es reflexiva} \Longleftrightarrow \exists a : (a \in A \;\wedge\; a\not\mathscr{R}\,a)$$

Consecuentemente, si podemos encontrar, al menos, un elemento a en el conjunto A que no esté relacionado consigo mismo, la relación $\mathscr{R}$ no es reflexiva.

Ejemplo 6.9 Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathscr{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (4, 4)\}$ una relación definida en A.

¿Es reflexiva? Dibujar el digrafo y escribir la matriz de la relación

Solución



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Relación Reflexiva

En efecto, $\mathscr{R}$ es reflexiva ya que para cada $a \in A$, el par (a, a) está en la relación. La figura anterior nos muestra el digrafo y la matriz de $\mathscr{R}$.

Nota 6.3 Obsérvese lo siguiente:

- El digrafo de una relación reflexiva se caracteriza por tener un bucle (ciclo de longitud uno) en cada uno de los vértices.
- La matriz de una relación reflexiva se caracteriza por tener todos los elementos de su diagonal principal iguales a uno. Es decir, si $M_{\mathscr{R}} = (r_{ij})$, entonces

$$\mathscr{R} \text{ es reflexiva } \iff r_{ii} = 1, \forall i$$

y

$$\mathscr{R} \text{ no es reflexiva } \iff \exists i : r_{ii} = 0$$

Ejemplo 6.10 Consideremos en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros las relaciones "menor o igual que" y "menor que". Estudiar la reflexividad de ambas relaciones.

Solución

(a) *"Menor o igual que".* $a\mathscr{R}b \iff a \leqslant b$

Sea a cualquier número entero, entonces

$$a = a$$

luego,

$$a = a \lor a < a$$

es decir,

$$a \leqslant a$$

por tanto,

$$\forall a \, (a \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a\mathscr{R}a)$$

Consecuentemente, la relación propuesta es *reflexiva.*

(b) *"Menor que"*. $a\mathscr{R}b \Longleftrightarrow a < b$.

Sea a cualquier número entero, entonces

$$a = a$$

es decir, a no es menor que a, de aquí que

$$a\not\mathscr{R}\, a$$

por tanto,

$$\exists a : (a \in \mathbb{Z} \wedge a\not\mathscr{R}\, a)$$

luego $\mathscr{R}$ no es una relación *reflexiva*.

6.5.2 Simetría

Una relación binaria $\mathscr{R}$ sobre un conjunto A es simétrica si cada vez que a está relacionado con b se sigue que b está relacionado con a. Es decir,

$$\mathscr{R} \text{ es simétrica} \Longleftrightarrow \forall a, b \in A\, (a\mathscr{R}b \Longrightarrow b\mathscr{R}a)$$

Nota 6.4 La equivalencia

$$\mathscr{R} \text{ es simétrica} \Longleftrightarrow \forall a, b \in A\, (a\mathscr{R}b \Longrightarrow b\mathscr{R}a)$$

puede escribirse en la forma

$$\mathscr{R} \text{ es simétrica} \Longleftrightarrow \forall a, b \in A\, [\neg\, (a\mathscr{R}b) \ \vee \ b\mathscr{R}a]$$

y si ahora negamos ambos miembros, tendremos

$$\neg\, (\mathscr{R} \text{ es simétrica}) \Longleftrightarrow \neg\forall a, b \in A\, [\neg\, (a\mathscr{R}b) \ \vee \ b\mathscr{R}a]$$

es decir,

$$\neg\, (\mathscr{R} \text{ es simétrica}) \Longleftrightarrow \exists a, b \in A : \neg\, [\neg\, (a\mathscr{R}b) \ \vee \ b\mathscr{R}a]$$

de aquí que

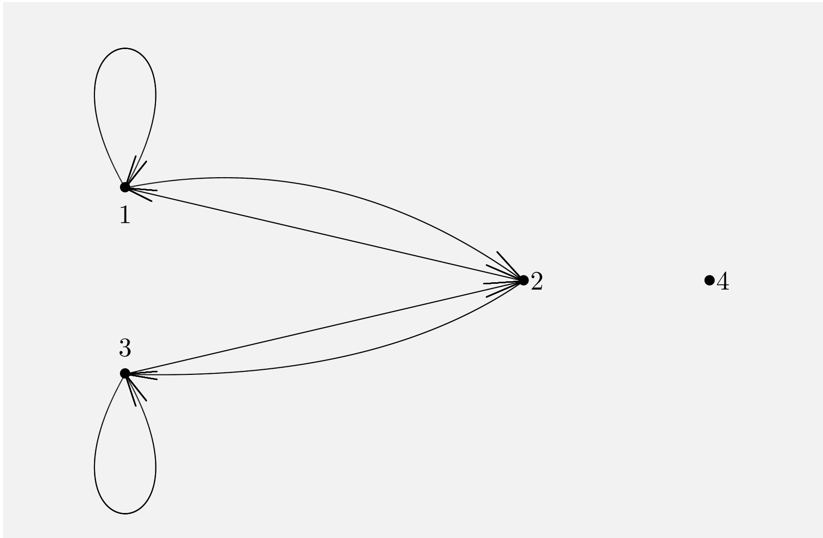
$$\mathscr{R} \text{ es no simétrica} \Longleftrightarrow \exists a, b \in A : (a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\not\mathscr{R}\, a)$$

O sea, si podemos encontrar dos elementos a y b en A tales que a esté relacionado con b y b no lo esté con a, entonces $\mathscr{R}$ es *no simétrica*.

Ejemplo 6.11 Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathscr{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ una relación definida en A.

¿Es simétrica? Dibujar el digrafo y escribir la matriz de la relación.

<u>Solución</u>



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relación Simétrica

En efecto, $\mathscr{R}$ es simétrica ya que para cada par $(a, b) \in \mathscr{R}$, el par (b, a) también pertenece a $\mathscr{R}$.

El digrafo y la matriz de $\mathscr{R}$ se muestran en la figura anterior

Nota 6.5 Obsérvese lo siguiente:

- Si D es el digrafo de una relación simétrica, entonces entre cada dos vértices distintos de D existen dos aristas o no existe ninguna.
- La matriz $M_{\mathscr{R}} = (m_{ij})$ de una relación simétrica, satisface la propiedad de que todo par de elementos colocados simétricamente respecto de la diagonal principal son iguales. Luego si $M_{\mathscr{R}} = (r_{ij})$ es la matriz de $\mathscr{R}$, entonces

$$\mathscr{R} \text{ es simétrica} \Longleftrightarrow r_{ij} = r_{ji}, \forall i, j$$

y

$$\mathscr{R} \text{ es no simétrica} \Longleftrightarrow \exists i, j : r_{ij} \neq r_{ji}$$

6.5.3 Asimetría

Una relación binaria $\mathscr{R}$ definida en un conjunto A se dice que es asimétrica si cada vez que $a\mathscr{R}b$ se sigue que $b\not\mathscr{R}\,a$. Es decir,

$$\mathscr{R} \text{ es asimétrica} \Longleftrightarrow \forall a, b \in A\,(a\mathscr{R}b \Longrightarrow b\not\mathscr{R}\,a)$$

Nota 6.6 La equivalencia

$$\mathscr{R} \text{ es asimétrica} \Longleftrightarrow \forall a, b \in A\,(a\mathscr{R}b \Longrightarrow b\not\mathscr{R}\,a)$$

puede escribirse en la forma

$$\mathscr{R} \text{ es asimétrica} \Longleftrightarrow \forall a, b \in A\,(a\not\mathscr{R}\,b \vee b\not\mathscr{R}\,a)$$

de donde negando ambos miembros, resulta

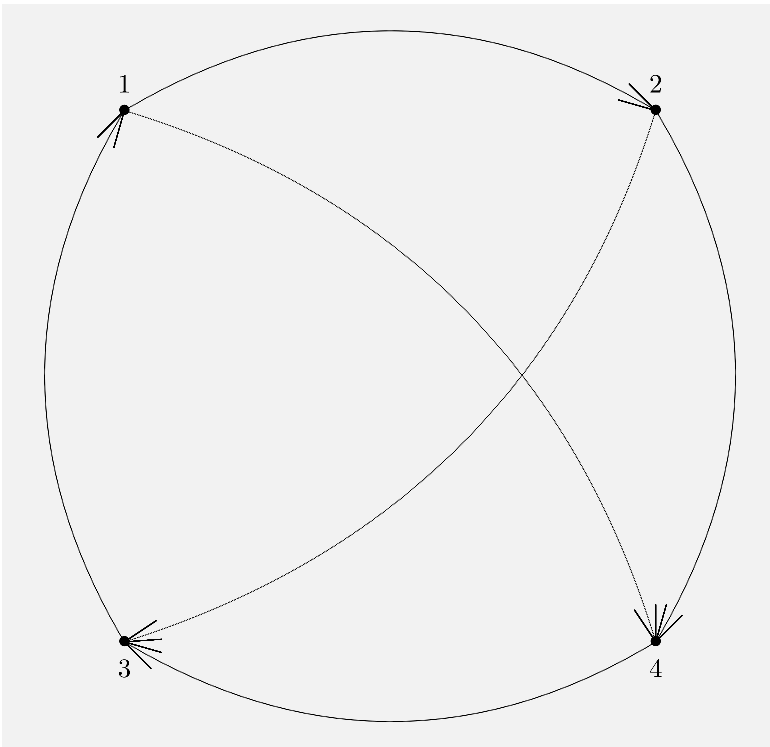
$$\mathscr{R} \text{ no es asimétrica} \Longleftrightarrow \exists a, b \in A\,(a\mathscr{R}b \wedge b\mathscr{R}a)$$

Ejemplo 6.12 Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathscr{R} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$ una relación definida en A.

¿Es asimétrica? Dibujar el digrafo y escribir la matriz de la relación.

<u>Solución</u>

$\mathscr{R}$ es, en efecto, asimétrica ya que para cada par (a, b) que pertenece a $\mathscr{R}$, el par (b, a) no pertenece.



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Relación Asimétrica

El digrafo y la matriz se muestran en la figura anterior.

Nota 6.7 Obsérvese lo siguiente

- Si D es el digrafo de una relación asimétrica, entonces entre cada dos vértices distintos del mismo, existe un arco o no existe ninguno.
- La matriz $M_{\mathscr{R}} = (r_{ij})$ de una relación asimétrica, satisface la propiedad de que si $i \neq j$, entonces $r_{ij} = 0$ ó $r_{ji} = 0$.

6.5.4 Antisimetría

Una relación binaria $\mathscr{R}$ sobre un conjunto A se dice antisimétrica si cuando $(a, b) \in \mathscr{R}$ y $(b, a) \in \mathscr{R}$, entonces $a = b$. Es decir,

$$\mathscr{R} \text{ es antisimétrica} \Longleftrightarrow \forall a, b \in A(a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\mathscr{R}a \Longrightarrow a = b)$$

Obsérvese que en virtud de la equivalencia lógica entre una proposición condicional y su contrarrecíproca, otra forma de expresar esta definición es

$$\begin{aligned}\mathscr{R} \text{ es antisimétrica} &\iff \forall a, b \in A \, (a \neq b \Longrightarrow a \not\mathscr{R}\, b \;\vee\; b \not\mathscr{R}\, a) \\ &\iff \forall a, b \in A \, [a \neq b \Longrightarrow (a \not\mathscr{R}\, b \wedge b \mathscr{R} a) \vee (a \mathscr{R} b \wedge b \not\mathscr{R}\, a) \vee (a \not\mathscr{R}\, b \wedge b \not\mathscr{R}\, a)]\end{aligned}$$

Nota 6.8 La equivalencia

$$\mathscr{R} \text{ es antisimétrica} \iff \forall a, b \in A (a \mathscr{R} b \;\wedge\; b \mathscr{R} a \Longrightarrow a = b)$$

la podemos escribir en la forma

$$\mathscr{R} \text{ es antisimétrica} \iff \forall a, b \in A \, [\neg \, (a \mathscr{R} b \;\wedge\; b \mathscr{R} a) \;\vee\; (a = b)]$$

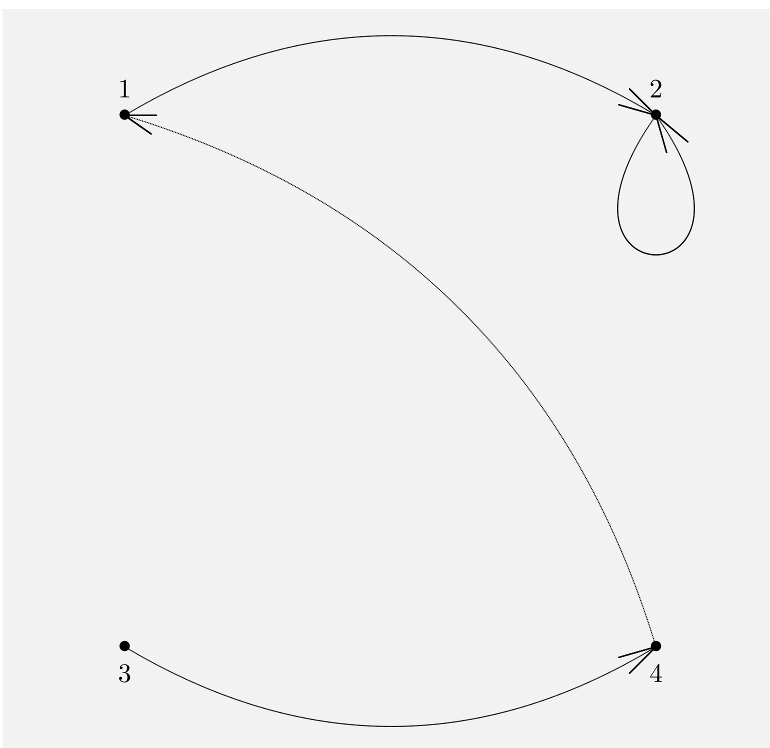
de donde, negando ambos miembros, resulta

$$\mathscr{R} \text{ es no antisimétrica} \iff \exists a, b \in A : (a \mathscr{R} b \;\wedge\; b \mathscr{R} a \;\wedge\; a \neq b)$$

O sea, si podemos encontrar dos elementos a y b en A tales que a esté relacionado con b y b relacionado con a, siendo ambos distintos, entonces la relación es *no antisimétrica.* ■

Ejemplo 6.13 Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $\mathscr{R} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 1)\}$ una relación definida en A. ¿Es antisimétrica? Dibujar el digrafo y escribir la matriz de $\mathscr{R}$.

<u>Solución</u>



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relación Antisimétrica

Observemos lo siguiente:

$1 \neq 2$ y $(1, 2) \in \mathscr{R}$, pero $(2, 1) \notin \mathscr{R}$, es decir $1 \mathscr{R} 2 \;\wedge\; 2 \not\mathscr{R}\, 1$.

$1 \neq 3$ y $(1, 3) \notin \mathscr{R}$ y $(3, 1) \notin \mathscr{R}$, es decir $1 \not\mathscr{R}\, 3 \;\wedge 3 \not\mathscr{R}\, 1$.

$1 \neq 4$ y $(4,1) \in \mathscr{R}$, pero $(1,4) \notin \mathscr{R}$, es decir $4\mathscr{R}1 \ \wedge \ 1\not\mathscr{R}\,4$.

$2 \neq 3$ y $(2,3) \notin \mathscr{R}$, $(3,2) \notin \mathscr{R}$, es decir $2\not\mathscr{R}\,3 \ \wedge 3\not\mathscr{R}\,2$.

$2 \neq 4$ y $(2,4) \notin \mathscr{R}$, $(4,2) \notin \mathscr{R}$, es decir $2\not\mathscr{R}\,4 \ \wedge 4\not\mathscr{R}\,2$.

$3 \neq 4$ y $(3,4) \in \mathscr{R}$, pero $(4,3) \notin \mathscr{R}$, es decir $3\mathscr{R}4 \ \wedge \ 4\not\mathscr{R}\,3$.

luego,

$$\text{si } a \neq b, \text{ entonces } (a,b) \notin \mathscr{R} \text{ ó } (b,a) \notin \mathscr{R}$$

de aquí que $\mathscr{R}$ sea antisimétrica.

El digrafo y la matriz de $\mathscr{R}$ se muestran en la figura anterior. ∎

Nota 6.9 Obsérvese lo siguiente:

- Si D es el digrafo de una relación antisimétrica, entonces entre cada dos vértices distintos de A, existe un arco o no existe ninguno.
- La matriz $M_{\mathscr{R}} = (r_{ij})$ de una relación antisimétrica, satisface la propiedad de que si $i \neq j$, entonces $r_{ij} = 0$ ó $r_{ji} = 0$. Es decir,

$$\mathscr{R} \text{ es antisimétrica} \Longleftrightarrow \forall i \neq j, r_{ij} = 0 \ \vee r_{ji} = 0$$

y

$$\mathscr{R} \text{ es no antisimétrica} \Longleftrightarrow \exists i, j : r_{ij} = 1 \ \wedge \ r_{ji} = 1 \ \wedge \ i \neq j$$

∎

Ejemplo 6.14 En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, consideramos la relación

$$\mathscr{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \leqslant b\}$$

es decir, la relación "menor o igual que". ¿Es simétrica?, ¿Es antisimétrica?

Solución

Simetría.

Considerando los enteros 1 y 2, tendremos que

$$1 \text{ es menor que } 2 \text{ y } 2 \text{ no es menor que } 1$$

es decir,

$$1\mathscr{R}2 \text{ y } 2\not\mathscr{R}\,1$$

luego,

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} : (a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\not\mathscr{R}\,a)$$

de aquí que por 4, la relación propuesta sea *no simétrica.*

Antisimetría.

Sean a y b dos enteros cualesquiera. Entonces,

$$\begin{aligned} a \neq b \quad &\Longrightarrow \quad a < b \ \vee \ b < a \\ &\Longrightarrow \quad \neg\,(b \leqslant a) \ \vee \ \neg\,(a \leqslant b) \\ &\Longrightarrow \quad a\not\mathscr{R}\,b \ \vee \ b\not\mathscr{R}\,a \end{aligned}$$

Consecuentemente, tendremos que

$$\forall a, b \in A \, (a \neq b \Longrightarrow a \not\mathscr{R} \, b \ \vee \ b \not\mathscr{R} \, a)$$

de aquí que la relación propuesta sea *antisimétrica.*

Veamos otra forma de probar la antisimetría.

$$\left.\begin{array}{l} a\mathscr{R}b \Longleftrightarrow a \leqslant b \Longrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}_0^+ : b = a + p \\ \text{y} \\ b\mathscr{R}a \Longleftrightarrow b \leqslant a \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}_0^+ : a = b + q \end{array}\right\} \Longrightarrow a = a + p + q \Longrightarrow p + q = 0 \Longrightarrow p = q = 0 \Longrightarrow a = b$$

Ejemplo 6.15 En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se considera la relación $\mathscr{R}$ definida por:

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow |x| = |y|$$

Estudiar la simetría y la antisimetría de $\mathscr{R}$.

Solución

Si x e y son dos enteros cualesquiera, entonces

$$x\mathscr{R}y \Longrightarrow |x| = |y| \Longrightarrow |y| = |x| \Longrightarrow y\mathscr{R}x$$

es decir la relación propuesta es *simétrica.*

Por otra parte, si x es un entero cualquiera distinto de cero, entonces

$$x \neq -x \text{ y } |x| = |-x| \text{ y } |-x| = |x|$$

es decir,

$$(x\mathscr{R}(-x) \ \wedge \ (-x)\mathscr{R}x) \ \wedge \ x \neq -x$$

luego $\mathscr{R}$ no es *antisimétrica.*

6.5.5 Transitividad

Se dice que una relación $\mathscr{R}$ definida en un conjunto A es transitiva si cuando $(a, b) \in \mathscr{R}$ y $(b, c) \in \mathscr{R}$, entonces $(a, c) \in \mathscr{R}$. Es decir,

$$\mathscr{R} \text{ es transitiva} \Longleftrightarrow \forall a, b, c \in A \, (a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\mathscr{R}c \Longrightarrow a\mathscr{R}c)$$

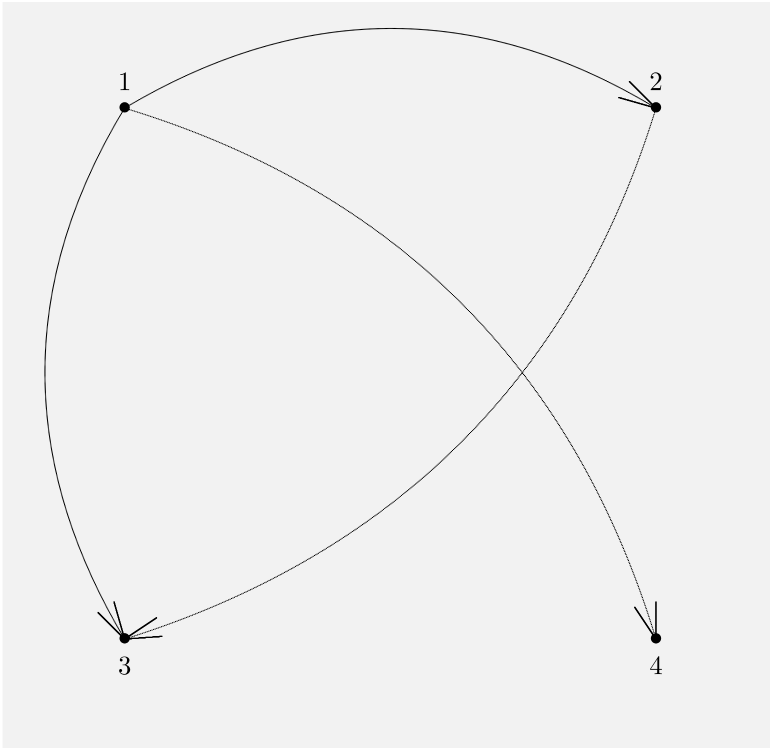
Nota 6.10 Negando los dos miembros de la equivalencia anterior, tendremos

$$\mathscr{R} \text{ es no transitiva} \Longleftrightarrow \exists a, b, c \in A : a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\mathscr{R}c \ \wedge \ a \not\mathscr{R} \, c$$

es decir, la relación $\mathscr{R}$ no es transitiva, si podemos encontrar elementos a, b, c en A tales que $a\mathscr{R}b$ y $b\mathscr{R}c$, pero $a \not\mathscr{R} \, c$.

Ejemplo 6.16 Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathscr{R} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$ una relación definida sobre A. ¿Es transitiva? Dibujar el digrafo y escribir la matriz de la relación.

Solución



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relación Transitiva

En efecto, $\mathscr{R}$ es transitiva porque si $(a,b) \in \mathscr{R}$ y $(b,c) \in \mathscr{R}$, también está en $\mathscr{R}$ el par (a,c).

El digrafo y la matriz de $\mathscr{R}$ se muestran en la figura.

Nota 6.11 Obsérvese lo siguiente:

- Si D es el digrafo de una relación transitiva y existen arcos desde a hasta b y desde b hasta c, entonces existirá un arco desde a hasta c. Por lo tanto, y existe un camino de longitud mayor que cero desde a hasta b, entonces existe un arco (camino de longitud uno) desde a hasta b.

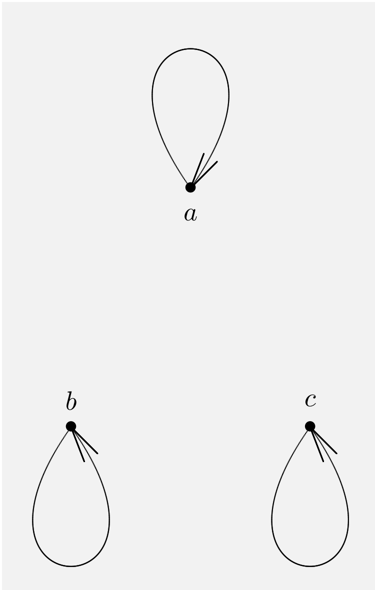
- Es posible caracterizar la relación transitiva por su matriz $M_{\mathscr{R}} = (r_{ij})$,

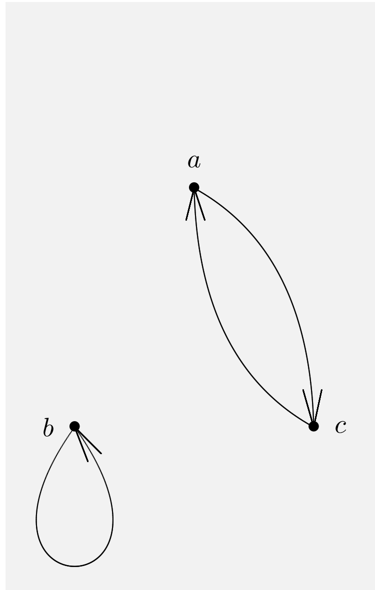
$$\mathscr{R} \text{ es transitiva } \iff (r_{ij} = 1 \ \wedge \ r_{jk} = 1 \Longrightarrow r_{ik} = 1)$$

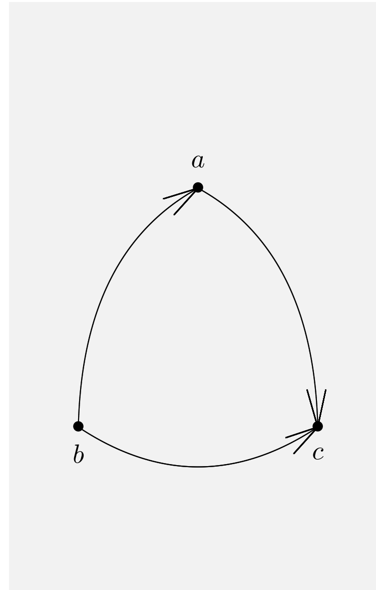
  y

$$\mathscr{R} \text{ es no transitiva } \iff r_{ij} = 1 \ \wedge \ r_{jk} = 1 \ \wedge r_{ik} = 0$$

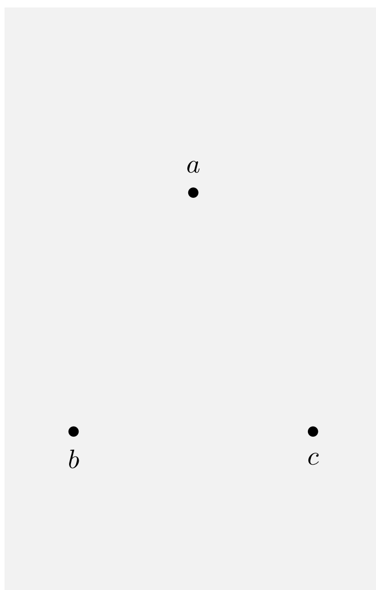
Ejemplo 6.17 Estudiar las propiedades de las relaciones definidas en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ cuyos digrafos son los de la figura siguiente.

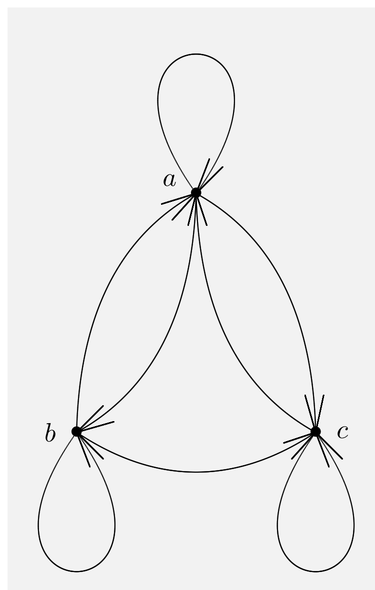






$\mathscr{R}_1$ $\mathscr{R}_2$ $\mathscr{R}_3$





$\mathscr{R}_4$ $\mathscr{R}_5$

Ejemplo 6.17

<u>Solución</u>

(a) $\mathscr{R}_1$ es la relación de igualdad sobre A. Es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

(b) $\mathscr{R}_2$ es simétrica. No es reflexiva, ni antisimétrica, ni transitiva.

(c) La relación $\mathscr{R}_3$ es antisimétrica y transitiva. No es reflexiva, ni simétrica.

(d) La relación $\mathscr{R}_4$ es la relación vacía. Es simétrica, antisimétrica, y transitiva, pero no es reflexiva.

(e) $\mathscr{R}_5$ es la relación universal. Es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no es antisimétrica. ■

Ejemplo 6.18 Para las siguientes afirmaciones sobre relaciones en un conjunto A, donde $|A| = n$, determinar si la proposición es verdadera o falsa. Si es falsa dar un contraejemplo.

(a) Si $\mathscr{R}$ es una relación reflexiva en A, entonces $|\mathscr{R}| \geqslant n$.

(b) Si $\mathscr{R}$ es una relación en A y $|\mathscr{R}| \geqslant n$, entonces $\mathscr{R}$ es reflexiva.

(c) Si $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ son dos relaciones en A, tales que $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{R}_2$, se verifica

Si $\mathscr{R}_1$ es reflexiva, simétrica y transitiva, entonces $\mathscr{R}_2$ también lo es.

(d) ¿Se verifica el recíproco del apartado anterior?

Solución

(a) ***Verdadera***.

Para todo $a \in A$ ha de cumplirse que $(a, a) \in \mathscr{R}$, luego en $\mathscr{R}$ hay, al menos, el mismo número de elementos que en A.

(b) ***Falsa***.

Por ejemplo, sea $A = \{1, 2\}$ y $\mathscr{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1\}$ el $|\mathscr{R}| > |A|$ y, sin embargo, $\mathscr{R}$ no es reflexiva.

(c) Reflexiva. ***Verdadero***.

En efecto, si $\mathscr{R}_1$ es reflexiva, entonces $(a, a) \in \mathscr{R}_1$ para cada a de A, luego como $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{R}_2$, tendremos que $(a, a) \in \mathscr{R}_2,\ \forall a \in A$ y $\mathscr{R}_2$ también será reflexiva.

Simétrica. ***Falso***.

En efecto, si $A = \{1, 2\}$, $\mathscr{R}_1 = \{(a, a)\}$ y $\mathscr{R}_2 = \{(a, a), (a, b)\}$, entonces $\mathscr{R}_1$ es simétrica, $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{R}_2$ pero $\mathscr{R}_2$ no es simétrica.

Transitiva. ***Falso***.

En efecto, sea $A = \{a, b, c\}$, $\mathscr{R}_1 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ y $\mathscr{R}_2 = \{(a, b), (b, c), (a, c), (c, a)\}$. Entonces, $\mathscr{R}_1$ es transitiva, $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{R}_2$, pero $\mathscr{R}_2$ no es transitiva.

(d) Reflexiva. ***Falso***.

En efecto, si $A = \{a, b\}$, $\mathscr{R}_1 = \{(b, b)\}$ y $\mathscr{R}_2 = \{(a, a), (b, b)\}$, entonces $\mathscr{R}_2$ es reflexiva, $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}_2$, pero $\mathscr{R}_1$ no es reflexiva.

Simétrica. ***Falso***.

En efecto, si $A = \{a, b\}$,$\mathscr{R}_1 = \{(a, b)\}$ y $\mathscr{R}_2 = \{(a, b), (b, a)\}$, entonces $\mathscr{R}_2$ es simétrica, $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{R}_2$, pero $\mathscr{R}_1$ no es simétrica.

Transitiva. ***Falso***.

En efecto, si $A = \{a, b, c\}$, $\mathscr{R}_1 = \{(a, b), (b, c)\}$ y $\mathscr{R}_2 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$, entonces $\mathscr{R}_2$ es transitiva, $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{R}_2$, pero $\mathscr{R}_1$ no es transitiva. ■

Ejemplo 6.19 Determinar las propiedades de las siguientes relaciones

(a) $\mathscr{R}$ es la relación definida en $\mathbb{Z}$, donde $x\mathscr{R}y$ si y sólo si $x + y$ es par (impar).

(b) $\mathscr{R}$ es la relación definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde $(a, b)\mathscr{R}(c, d)$ si y sólo si $a \leqslant c$.

Solución

(a) $x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x + y$ es par (impar)

Reflexividad.
Dado $x \in \mathbb{Z}$ cualquiera, se verifica que $x + x = 2x$ es par, luego $x\mathscr{R}x$, es decir la relación "par" es reflexiva.
La relación "impar", obviamente, no es reflexiva.

Simetría.
Dados x e y cualesquiera de $\mathbb{Z}$, se verifica:

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x + y \text{ es par (impar)} \Longrightarrow y + x \text{ es par (impar)} \Longleftrightarrow y\mathscr{R}x$$

luego la relaciones "par" e "impar" son simétricas.

Antisimétrica.
Sean x e y dos enteros distintos cualesquiera tales que $x + y$ sea par. Entonces, $y + x$ también es "par", luego

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} : x\mathscr{R}y \ \wedge \ y\mathscr{R}x \ \wedge \ x \neq y$$

y la relación "par" no es antisimétrica.
Lo mismo puede decirse de la relación impar.

Transitiva.
Dados x, y, z cualesquiera de $\mathbb{Z}$, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x + y \text{ par } \Longrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : x + y = 2p \\ y\mathscr{R}z \Longleftrightarrow y + z \text{ par } \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : y + z = 2q \end{array}\right\} \Longrightarrow x + z = 2(p + q - y) \Longrightarrow x + z \text{ par } \Longrightarrow x\mathscr{R}z$$

Luego la relación "par" si es transitiva. Veamos la "impar".

$$\left.\begin{array}{l} x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ impar } \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : x + y = 2p + 1 \\ y\mathscr{R}z \Leftrightarrow y + z \text{ impar } \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : y + z = 2q + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x + z = 2(p + q - y) + 2 \Rightarrow x + z \text{ par } \Rightarrow x \not\mathscr{R} z$$

por tanto, la relación "impar" no es transitiva.

(b) $(a, b)\mathscr{R}(c, d) \Longleftrightarrow a \leqslant c$

Reflexiva.
Para cualquier a entero, se verifica que $a = a$, luego $a \leqslant a$, es decir, $(a, b)\mathscr{R}(a, b)$

Simétrica.
Sean a, b, c y d cuatro números enteros tales que $a \leqslant c$. Entonces, $(a, b)\mathscr{R}(c, d)$, sin embargo el par (c, d) no está relacionado con el (a, b) ya que $c \nleqslant a$. Por tanto,

$$\exists (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a, b)\mathscr{R}(c, d) \ \wedge \ (c, d)\not\mathscr{R}(a, b)$$

es decir, la relación no es simétrica.

Antisimétrica.
Sean (a, b) y (c, d) dos elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tales que $a = c$ y $b \neq d$. Entonces $(a, b)\mathscr{R}(c, d)$ y $(c, d)\mathscr{R}(a, b)$, sin embargo $(a, b) \neq (c, d)$, es decir,

$$\exists (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a, b)\mathscr{R}(c, d) \ \wedge \ (c, d)\mathscr{R}(a, b) \ \wedge \ (a, b) \neq (c, d)$$

por lo tanto, la relación no es antisimétrica.

Transitiva.
Dados tres elementos (a, b), (c, d) y (e, f), cualesquiera de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} (a, b)\mathscr{R}(c, d) \\ \wedge \\ (c, d)\mathscr{R}(e, f) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} a \leqslant c \\ \wedge \\ c \leqslant e \end{array}\right\} \Longrightarrow a \leqslant e \Longrightarrow (a, b)\mathscr{R}(e, f)$$

luego la relación dada es transitiva. ■

Ejemplo 6.20 Sea $\mathscr{R} = \{(a,b),(a,c),(b,c),(a,a),(b,b)\}$ una relación definida en $A = \{a,b,c\}$. Decir que propiedades tiene, dibujar un digrafo de la misma y escribir su matriz.

Solución

– No es reflexiva, ya que $(c,c) \notin \mathscr{R}$

– No es simétrica, ya que por ejemplo $(a,b) \in \mathscr{R}$ y, sin embargo $(b,a) \notin \mathscr{R}$.

– Es antisimétrica. En efecto,

$$a \neq b \text{ y } b \not\mathscr{R}\, a$$
$$a \neq c \text{ y } a \not\mathscr{R}\, b$$
$$b \neq c \text{ y } c \not\mathscr{R}\, b$$

luego,

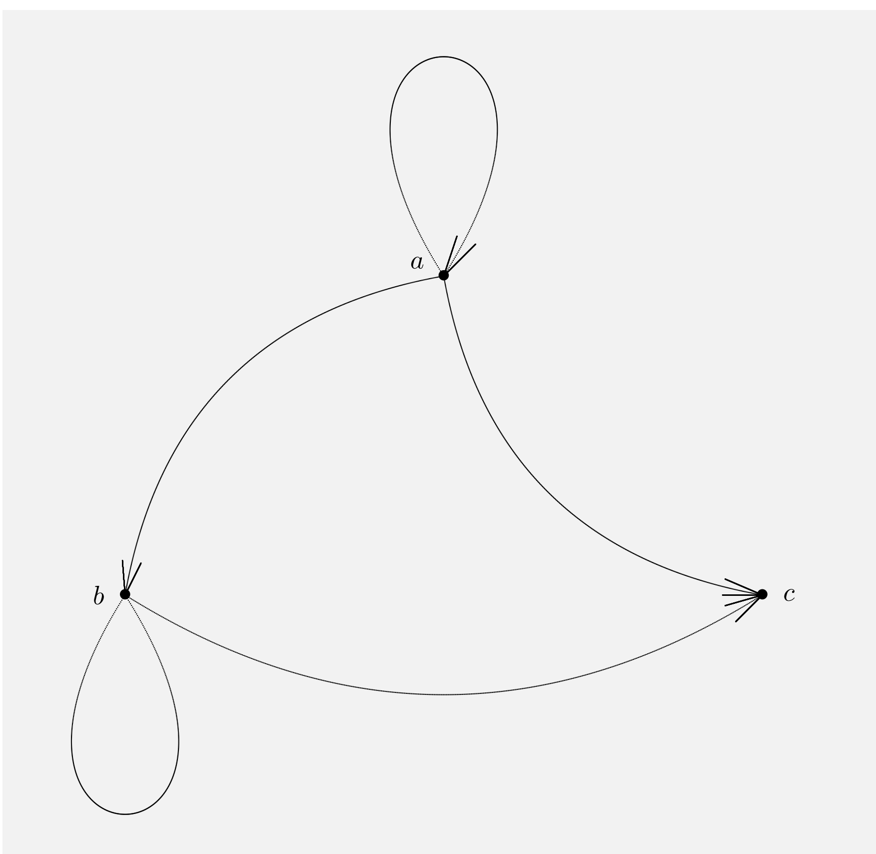
$$\forall x,y \in A\,(x \neq y \Longrightarrow x \not\mathscr{R}\, y \;\vee\; y \not\mathscr{R}\, x)$$

y, por tanto, $\mathscr{R}$ es antisimétrica.

– Es transitiva, ya que

$$\forall x,y,z \in A(x\mathscr{R}y \;\wedge\; y\mathscr{R}z \Longrightarrow x\mathscr{R}z)$$

El digrafo y la matriz de la relación se muestran en la figura siguiente:



$$M_{\mathscr{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.20

Ejemplo 6.21 Una relación $\mathscr{R}$ definida en un conjunto A, ¿puede tener las propiedades simétrica y antisimétrica?

<u>Solución</u>

La relación $\mathscr{R} = \{(a, a) : a \in A\}$ definida en cualquier conjunto A es simétrica y antisimétrica. ■

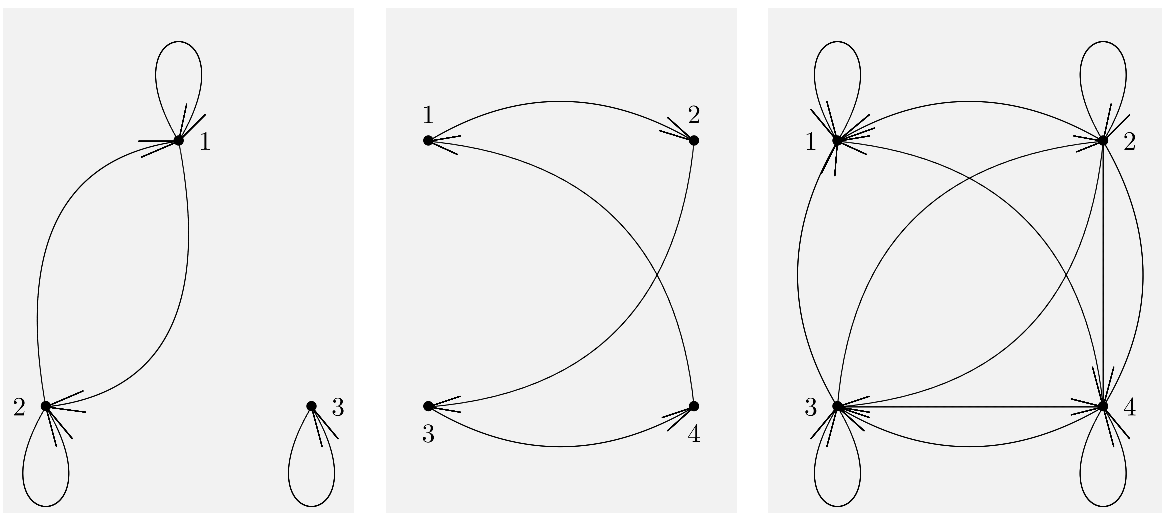
Ejemplo 6.22 Dibujar el digrafo de las relaciones siguientes:

(a) La relación $\mathscr{R} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (1, 1), (2, 2)\}$ definida en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

(b) La relación $\mathscr{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ definida en $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(c) La relación $\mathscr{R}$ sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por $x^2 \geqslant y$.

<u>Solución</u>



(a) (b) (c)

Ejemplo 6.22

Ejemplo 6.23 Estudiar la relación en $\mathbb{Q}$ dada por

$$a\mathscr{R}b \text{ si y sólo si } |a - b| < 1$$

<u>Solución</u>

Veamos que propiedades tiene la relación dada.

Reflexividad. Dado cualquier número racional a, se verifica que $|a - a| = 0 < 1$, luego $a\mathscr{R}a$.

Simetría. Dados dos racionales cualesquiera a y b,

$$a\mathscr{R}b \Longleftrightarrow |a - b| < 1 \Longrightarrow |b - a| < 1 \Longrightarrow b\mathscr{R}a$$

luego la relación es simétrica.

Transitividad. Sean a, b y c tres números racionales tales que $a\mathscr{R}b$ y $b\mathscr{R}c$. Entonces

$$a\mathscr{R}b \Longleftrightarrow |a-b| < 1$$
$$b\mathscr{R}c \Longleftrightarrow |b-c| < 1$$

sin embargo,

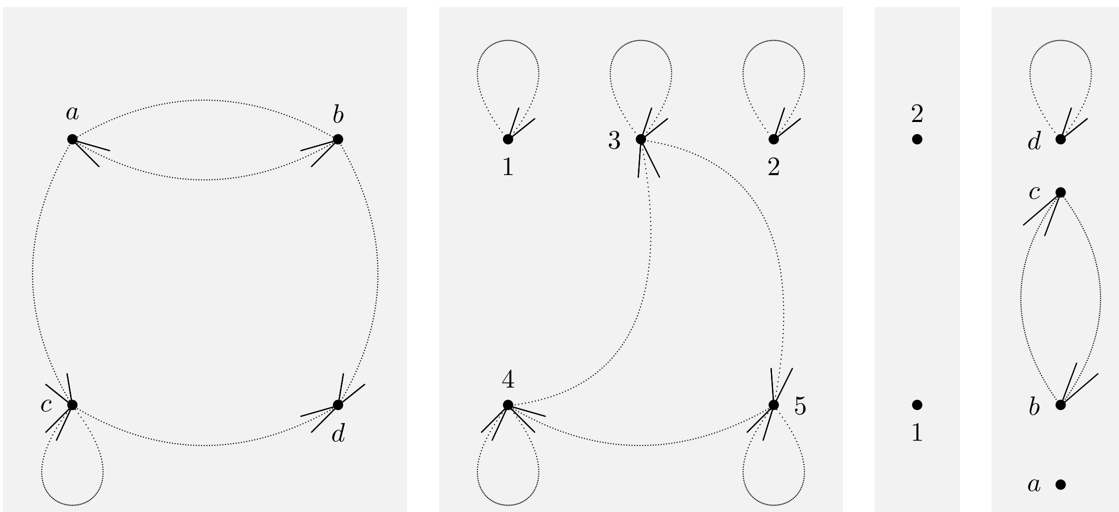
$$|a-c| = |a-b+b-c| \leqslant |a-b| + |b-c| < 2$$

por tanto,

$$\exists a, b, c \in \mathbb{Q} : a\mathscr{R}b \ \wedge \ b\mathscr{R}c \ \wedge \ a\not\mathscr{R}\, c$$

por tanto, $\mathscr{R}$ no es transitiva.

Ejemplo 6.24 Escribir la relación cuyos digrafos son los de la figura siguiente, como conjunto de pares ordenados.



(a) (b) (c) (d)

Ejemplo 6.24

<u>Solución</u>

(a) $\mathscr{R} = \{(a,b),(a,c),(b,d),(b,a),(c,d),(c,c)\}$

(b) $\mathscr{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,5),(4,3),(4,4),(5,4)(5,5)\}$

(c) $\mathscr{R} = \emptyset$

(d) $\mathscr{R} = \{(b,c),(c,b),(d,d)\}$