



Guía 3: Relaciones

1. Demuestre o refute la siguiente afirmación: “Si R es una relación simétrica y transitiva entonces también es refleja”.
2. Dé un ejemplo de relaciones que sean
 - a) simétrica y refleja pero no transitiva.
 - b) refleja y transitiva pero no simétrica.
 - c) simétrica y transitiva pero no refleja.
3. ϕ es una relación (ya que es subconjunto de cualquier conjunto). ¿Qué propiedades cumple ϕ como relación?
(Ayuda: Sin pérdida de generalidad, puede suponer que ϕ es una relación sobre un conjunto finito)
4. Sea A un conjunto con n elementos.
 - a) ¿Cuántas relaciones refleja se pueden crear con elementos de A ?
 - b) ¿Cuántas relaciones simétricas se pueden crear con elementos de A ?
 - c) ¿Cuántas relaciones antisimétricas se pueden crear con elementos de A ?
5. Sea A un conjunto con n elementos y R una relación antisimétrica sobre A .
 - a) ¿Cuál es la máxima cantidad de pares ordenados que puede contener R ?
 - b) ¿Cuántas relaciones antisimétricas distintas sobre A tienen exactamente esa cantidad de pares?
6. Para cada una de las siguientes relaciones determine si es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva, demostrando o dando un contraejemplo en cada caso.
 - a) $R_{//}$ sobre el conjunto de todas las rectas de \mathbb{R}^2 , tales que la recta l_1 está relacionada con la recta l_2 si y sólo si l_1 es paralela a l_2 ($l_1 R_{//} l_2 \Leftrightarrow l_1 // l_2$).
 - b) R_{\perp} sobre el conjunto de todas las rectas de \mathbb{R}^2 , tales que la recta l_1 está relacionada con la recta l_2 si y sólo si l_1 es perpendicular a l_2 ($l_1 R_{\perp} l_2 \Leftrightarrow l_1 \perp l_2$).
 - c) R sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(a, b)R(c, d)$ si y sólo si $a \leq c$. (Note que en este último caso la relación R es subconjunto de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.)
 - d) R sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(a, b)R(c, d)$ si y sólo si ocurre que $a < b$, o que $a = b$ y $c \leq d$.
7. ¿Qué puede decir de la relación $R_{//} \circ R_{\perp}$ (la composición de las relaciones $R_{//}$ y R_{\perp} definidas en el ejercicio anterior), qué propiedades cumple, cómo se compara con $R_{//}$ y con R_{\perp} , etc.?
8. Sea $f : A \rightarrow B$ una función cualquiera de A en B . Sea R una relación sobre A tal que xRy si y sólo si $f(x) = f(y)$. Demuestre que R es refleja, simétrica y transitiva.

9. Demuestre o refute (de un contraejemplo) cada una de las siguiente afirmaciones. En cada caso R_1 y R_2 son relaciones sobre un conjunto A cualquiera.

a) Si R_1 y R_2 son simétricas entonces $R_1 \cap R_2$ es simétrica.

b) Si R_1 y R_2 son reflejas entonces $R_1 \cup R_2$ es refleja.

c) Si R_1 y R_2 son transitivas entonces $R_1 \cap R_2$ es transitiva.

d) Si R_1 y R_2 son transitivas entonces $R_1 \circ R_2$ es transitiva.

10. Los siguientes ejercicios tienen que ver con teoremas de los apuntes.

a) Demuestre en forma directa (sólo usando las definiciones) el teorema 1.4.1.

b) Demuestre el teorema 1.4.2.

c) Demuestre el teorema 1.4.3.

d) Demuestre el teorema 1.4.1 como conclusión de los teoremas 1.4.3 y 1.4.2.