Capítulo 4.

Lógica matemática

Continuar

Introducción

La lógica estudia la forma del razonamiento, es una disciplina que por medio de reglas y técnicas determina si un teorema es falso o verdadero, además de que es ampliamente aplicada en filosofía, matemáticas, computación y física. En filosofía se utiliza para establecer si un razonamiento es válido o no. En matemáticas es una herramienta útil para demostrar teoremas e inferir resultados, así como para resolver problemas. En la computación se aplica en la elaboración y revisión de programas, estudio de lenguajes formales y la relación existente entre ellos. En la física se necesita tanto para establecer el procedimiento de un experimento como para interpretar los resultados.

Proposiciones

Una proposición o enunciado es una oración, frase o expresión matemática que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

Símbolo lógico	
$\sim$	Para la negación
$\vee$	Para la disyunción (o inclusiva)
Δ	Para la disyunción (o exclusiva)
$\wedge$	Para la conjunción
$\rightarrow$	Para la condicional o implicación
$\leftrightarrow$	Para la bicondicional
$\sim p$	*Se lee "no p"*
$p \vee q$	*Se lee "p ó q"*
$p \wedge q$	*Se lee "p y q"*
$p \rightarrow q$	*Se lee "si p, entonces q"*
$p \leftrightarrow q$	*Se lee "p si, y solo q"*

♠ *Es importante notar que hay dos tipos de disyunción: La inclusiva y al exclusiva. Un ejemplo de la disyunción exclusiva se encuentra en la frase "O viajo en bus o viajo en avión". En cambio la o en su sentido inclusivo lo encontramos en la frase "Javier es profesor de física o María es enfermera". La disyunción inclusiva se usa cuando se desea incluir el caso en que ambas alternativas se cumplan y la disyunción exclusiva cuando uno desea que las alternativas sean excluyentes, es decir, se cumple uno o el otro, pero no ambos.*

Proposiciones compuestas

Existen conectores u operadores lógicos que permiten formar proposiciones compuestas. Se dice que una proposición es compuesta cuando está integrada por dos o más proposiciones simples conectadas por medio de operadores lógicos.

p	q	p o q	p y q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

Operador and (y)

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero.

Operador AND		
Condición 1	Condición 2	Resultado
FALSO	FALSO	FALSO
FALSO	VERDADERO	FALSO
VERDADERO	FALSO	FALSO
VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO

Operador or (o)

Con este operador se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera.

Operador OR		
Condición 1	Condición 2	Resultado
FALSO	FALSO	FALSO
FALSO	VERDADERO	VERDADERO
VERDADERO	FALSO	VERDADERO
VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO

Operador not (no)

El operador lógico not tiene como función negar la proposición. Esto significa que si a alguna proposición verdadera se le aplica el operador not, se obtendrá su complemento o negación.

TABLA DE VERDAD DEL OPERADOR NOT
NOT true → false
NOT false → true

Operador or exclusivo (xor)

Su funcionamiento es semejante al de or con la diferencia de que su resultado es verdadero solamente si una de las proposiciones es cierta, ya que cuando ambas son verdad el resultado es falso.

	p	$\bar{p}$	$p \vee q$	
Si por lo menos una es verdadera	V	V	V	disyunción inclusiva es verdadera
	V	F	V	
	F	V	V	
Si las dos son falsas	F	F	F	disyunción inclusiva es falsa

Proposición condicional

Una proposición condicional es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuestas).

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposición bicondicional

Donde la proposición que representa el enunciado (p←→q) es verdadera si p es verdadera si y sólo si q también lo es. O bien la proposición es verdadera si p es falsa y si sólo si q también lo es.

TABLA DE VERDAD DE LA BICONDICIONAL

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tablas de verdad

Por medio de una tabla de verdad es posible mostrar los resultados obtenidos al aplicar cada uno de los operadores lógicos, así como el resultado de la proposición para todos y cada uno de los valores que pueden tener las diferentes proposiciones simples que integran una proposición compuesta. Con la tabla de verdad se puede observar el comportamiento de una proposición y con base a ello determinar propiedades y características.

p	q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

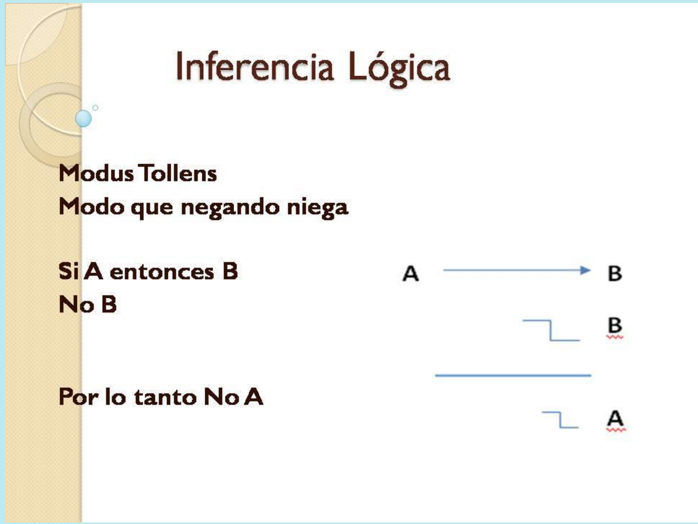
Tautología, contradicción y contingencia

Tautología es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables, ya que el resultado es verdadero para todos los valores que puede tener p. Se dice que una proposición es una contradicción o absurdo si al evaluar esa proposición el resultado es falso, para todos los valores de verdad. Una proposición compuesta cuyos valores, en sus diferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado unos y ceros se llama contingencia, inconsistencia o falacia.

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$[(p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \Rightarrow p)]$
V	V	V	**V**	V	V	V
V	F	F	**V**	F	F	V
F	V	F	**V**	V	F	F
F	F	V	**V**	V	V	V
		1		1	**3**	2

Inferencia lógica

Los argumentos basados en tautologías representan métodos de razonamiento universalmente correctos. Su validez depende solamente de la forma de las proposiciones que intervienen y no de los valores de verdad de las variables que contienen. A esos argumentos y a la forma en que se relacionan entre sí se les llama reglas de inferencia, y éstas permiten relacionar dos o más proposiciones para obtener una tercera que es válida en una demostración.



Equivalencia lógica

Se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente equivalentes, si coinciden sus resultados para los mismos valores de verdad.

$$
\begin{aligned}
&\equiv \overline{[(p \wedge r) \Rightarrow q]} \vee [p \Rightarrow (r \Rightarrow q)] \\
&\equiv \overline{\left[\overline{(p \wedge r)} \vee q\right]} \vee [\overline{p} \vee (r \Rightarrow q)] \\
&\equiv \left[\overline{\overline{(p \wedge r)}} \wedge \overline{q}\right] \vee [\overline{p} \vee (\overline{r} \vee q)] \\
&\equiv [p \wedge r \wedge \overline{q}] \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee q] \\
&\equiv \underbrace{\underbrace{[p \wedge r \wedge \overline{q}]}_{s} \vee \underbrace{\overline{[p \wedge r \wedge \overline{q}]}}_{\overline{s}}}_{\text{Verdad}}
\end{aligned}
$$

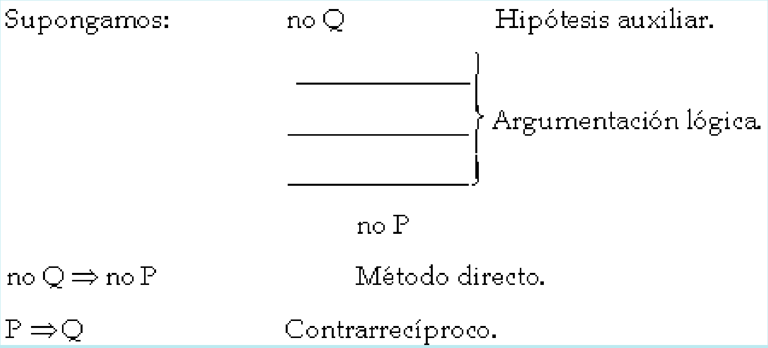
Demostración formal

Los argumentos lógicos son razonamientos resultantes del enunciado de un problema que es posible representar, usando notación lógica, como una proposición condicional integrada por varias proposiciones simples, siempre y cuando se identifiquen claramente las proposiciones simples y los conectores lógicos que unen dichas proposiciones.

1. $p \to \neg q$	Premisa
2. $q \vee \neg r$	Premisa
3. $s \to r$	Premisa
4. p	Premisa Adicional
5. $\neg q$	MPP(1,4)
6. $\neg r$	SD(2,5)
7. $\neg s$	MTT(3,6)

Demostración por el método directo

Supóngase que **P→Q** es el teorema resultante del planteamiento de un problema usando para ello notación lógica, y que **P** y **Q** son proposiciones compuestas en las que interviene cualquier número de proposiciones simples que conforman una serie de hipótesis consideradas verdaderas. Se dice que **Q** se desprende lógicamente de **P,** y que por lo tanto el teorema **P→Q** es verdadero. Sin embargo también **P→Q** puede ser falso, si se presenta alguna inconsistencia en la demostración o planteamiento inicial.



Demostración por contradicción

El procedimiento de la demostración por contradicción es semejante al del método directo, con la diferencia de que las líneas iniciales de dicha demostración no son únicamente las hipótesis, sino que además se incluye una línea con la negación de la conclusión.

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

Argumentos válidos y no válidos

Un argumento consiste en una o más hipótesis y una conclusión, de forma que la conclusión se apoye en las hipótesis. También se puede considerar a un argumento como una serie de proposiciones interrelacionadas que conforman una proposición más compleja, a la cual se le llama teorema. Todos los argumentos necesitan de una o más proposiciones iniciales, y a estas proposiciones iniciales se les llama hipótesis. La conclusión de un argumento o teorema es una consecuencia de las hipótesis, por esa razón se requiere que las hipótesis sean convincentes y explícitas.

	Razonamiento	
	Válido	**No Válido**
Acepta	V / V F / F F / V	V / V F / F F / V V / F

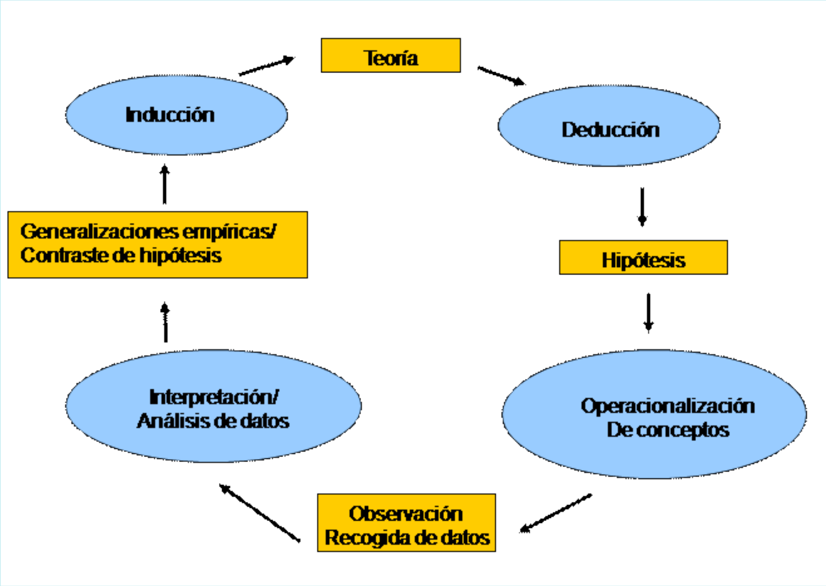
Método de Quine

Otra manera de probar la validez de un argumento es por medio del Método de Quine llamado así en honor al filósofo norteamericano que lo diseñó, Williard Van Orman Quine. Este método sirve para saber si un enunciado es válido o no, sin usar las tablas de verdad. El método consiste en sustituir los valores falso y verdadero en algunas o todas las proposiciones que integran la proposición compuesta, e inferir de esa manera si se trata de un argumento válido.

Tipos de argumentos

Existen dos tipos de argumentos lógicos: deductivos e inductivos.

- En un argumento deductivo se va de lo general a lo particular, se trata de un procedimiento que parte de un teorema integrado por hipótesis y una conclusión.
- En un argumento inductivo se va de lo particular a lo general, se puede decir que es el conjunto de observaciones y datos cuya tendencia permite visualizar o generalizar el comportamiento de un evento.



Predicados y sus valores de verdad

Se basa en que las proposiciones son conjuntos de elementos que tienen una propiedad o característica llamada predicado y en este contexto una proposición puede ser verdadera para un grupo de elementos de un conjunto, pero falsa para otro.

p	q	r
W	W	W
F	W	W
W	F	W
W	W	F
F	F	W
F	W	F
W	F	F
F	F	F

p	q
W	W
F	W
W	F
F	F

p
W
F

Inducción matemática

La inducción matemática se utiliza cuando se desea probar si una expresión matemática es falsa o verdadera, sin necesidad de representarla con notación lógica. Esto implica que es posible representar algoritmos en forma matemática y probar si esos algoritmos son falsos o verdaderos, usando para ello inducción matemática.

$2k < 2^k \wedge 2 < k$	Por hipóteis,
$2(2k) < 2\left(2^k\right)$	multiplicando por 2,
$2k + 2k < 2\left(2^k\right)$	como $1 < k$ entonces $2 \leq 2k$ luego $2k + 2 \leq 2k + 2k$,
$2k + 2 < 4k < 2^{k+1}$	
$2(k + 1) < 2^{k+1}$	por transitividad.