

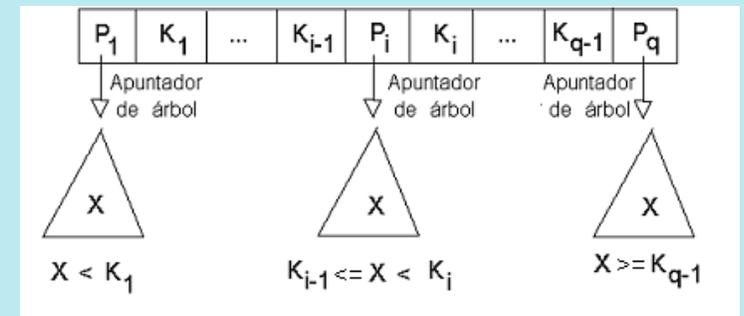
Capítulo 6.

Relaciones

Continuar

Introducción

Una relación es una correspondencia entre dos elementos de dos conjuntos con ciertas propiedades. En computación las relaciones se utilizan en base de datos, estructuras de datos, redes, autómatas y lenguajes. Las estructuras de datos son relaciones que permiten acceder de manera más rápida y ordenada la información, por lo general la relación la establece el orden en que se deseen recorrer los datos usando como elemento físico de relación entre los nodos y los apuntadores.



Elementos de una relación

Una relación R es un conjunto de pares ordenados en donde el primer elemento a está relacionado con el segundo elemento b por medio de cierta propiedad o característica. La relación se indica como aRb .

Una relación de este tipo se puede representar mediante pares ordenados, $(a, b) \in A \times B$.

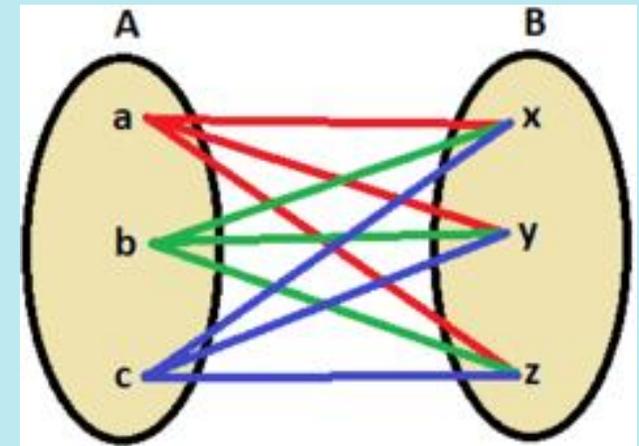
$$R = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B \wedge R(a, b) = \text{cierto}\}$$

Las proposiciones siguientes son correctas para representar una relación binaria R :

$$aRb \quad \text{o} \quad R(a, b) \quad \text{o bien} \quad (a, b) \in R$$

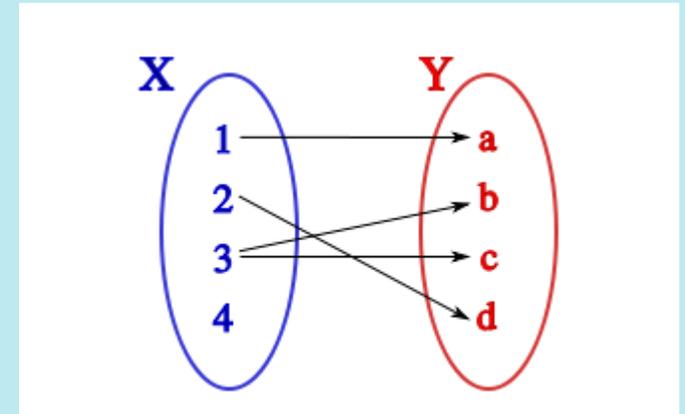
Producto cartesiano

Es la combinación de todos los elementos del conjunto A con todos los elementos del conjunto B. En teoría de conjuntos equivale al conjunto universo.



Relación binaria

Se puede representar por medio de una matriz, tabla o gráfica, se le llama relación binaria porque sus elementos son pares ordenados que se forman a partir de dos conjuntos.



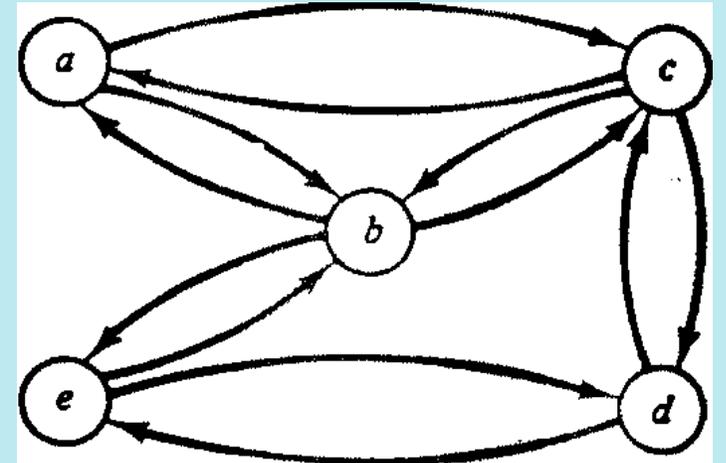
Matriz de una relación

Si A y B son dos conjuntos finitos con m y n elementos, respectivamente, y R es una relación de A en B , entonces es posible representar a R como una matriz $M_{R=[m_{ij}]}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_m \end{bmatrix}$$

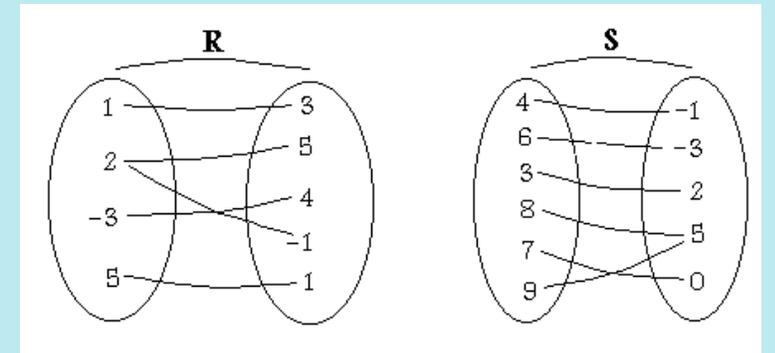
Grafo de una relación

Es posible representar una relación por medio de una gráfica integrada por nodos y flechas, y a este tipo de gráfica se le conoce como grafo dirigido de R . Para hacer un grafo sólo se tienen que colocar los elementos de los conjuntos A y B como nodos, y la relación que existe entre los elementos se indica por medio de una flecha que va del elemento al conjunto A al elemento del conjunto B con el que está relacionado.



Tipos de relaciones

Las relaciones y funciones deben cumplir con ciertos requisitos para que sean consideradas como tales, y como cada una de ellas tiene sus características propias es posible establecer cierta clasificación.



Relación reflexiva

Es reflexiva cuando todo elemento de un conjunto A está relacionado consigo mismo, esto es, cuando se cumple que aRa para todo elemento de A . Una característica de este tipo de relación es que su matriz correspondiente contiene unos en toda su diagonal principal y los elementos restantes de la matriz pueden ser unos o ceros.

$$(M_R)_{\odot}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relación irreflexiva

Es cuando ningún elemento del conjunto A está relacionado consigo mismo. En este caso la matriz deberá contener únicamente ceros en la diagonal. Si la diagonal de la matriz tiene ceros y unos, la relación correspondiente no es reflexiva ni irreflexiva.

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relación simétrica

Se dice que una relación $R:A \rightarrow B$ es simétrica cuando $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$. Si (a, b) está en la relación pero (b, a) no, entonces la relación no es simétrica.

R3	1	2	3	4
1	✓	✓		✓
2	✓	✓		
3			✓	
4	✓			✓

Relación Simétrica

Relación antisimétrica

Una relación es antisimétrica cuando uno de los pares colocados simétricamente no están en la relación, lo cual significa que $(a, b) \in R$ o bien $(b, a) \in R$. En la diagonal puede haber ceros o unos, y también puede haber pares de ceros colocados simétricamente y por lo tanto es una relación antisimétrica.

R4	1	2	3	4
1				
2	✓			
3	✓	✓		
4	✓	✓	✓	

Relación antisimétrica

Relación transitiva

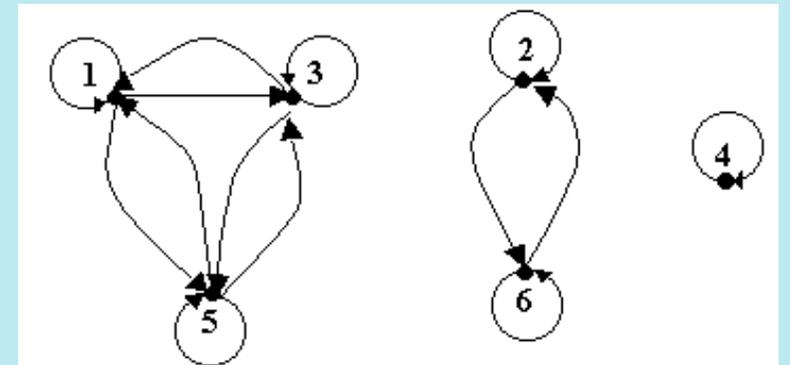
Una relación de A en B tiene la propiedad de ser transitiva si cuando aRb y bRc entonces existe el par aRc .

R4	1	2	3	4
1				
2	✓			
3	✓	✓		
4	✓	✓	✓	

Relación Transitiva

Relaciones de equivalencia, clases y particiones

Una relación de equivalencia es aquella que tiene las tres propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva. Una relación de equivalencia tiene clases de equivalencia y éstas forman particiones. Una partición es un subgrafo completo. Las clases de equivalencia son conjuntos que contienen a todos los elementos y que están relacionados con A. Una partición es un conjunto de clases de equivalencia, deberán estar contenidos todos los elementos del conjunto A y la intersección entre las clases de equivalencia deberá ser vacía.

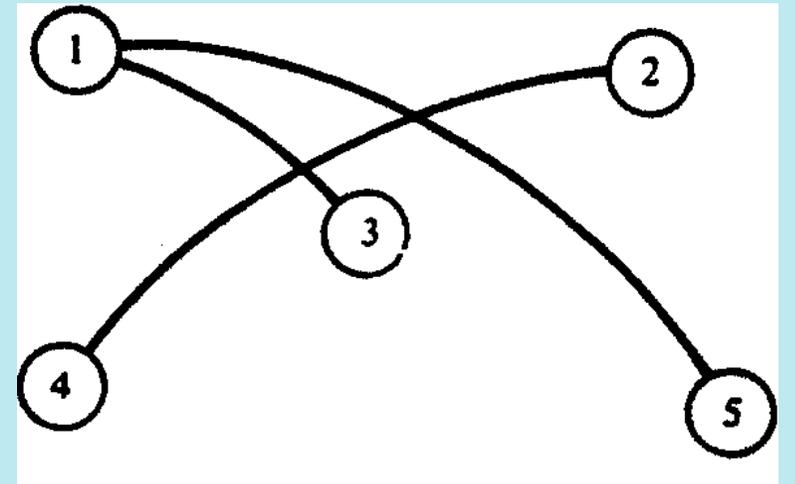


Cerraduras

Cerradura reflexiva: En este caso se agrega a la relación R la relación identidad para obtener una relación que sea reflexiva. La relación identidad es una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal son únicamente unos y los elementos restantes son ceros.

Cerradura simétrica: A la relación R se le agrega la relación inversa R^{-1} para que la relación resultante tenga la propiedad de simetría.

Cerradura transitiva: A la relación R se agrega la matriz que resulta de multiplicar la relación por ella misma.



Operaciones entre relaciones

Las operaciones que se pueden llevar a cabo con relaciones son: unión, intersección, complemento, composición e inversa de una relación. Estas operaciones se pueden hacer usando matrices o bien con conjuntos.

-Complemento de R: Contiene todos aquellos pares ordenados que no forman parte de la relación R.

-Intersección: La intersección de dos relaciones contiene a todos los pares ordenados comunes a las relaciones R y S.

Unión: Los elementos que están en la unión de dos relaciones son todos los pares ordenados que están en R, S o en ambos.

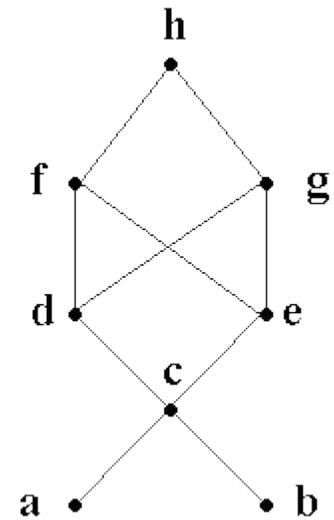
Inversa: Cuando se trabaja con conjuntos se intercambia la posición de a y b, esto implica que si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R^{-1}$.

Composición: Es posible obtener la composición de dos relaciones por medio de una multiplicación booleana de las matrices de las relaciones R o S.



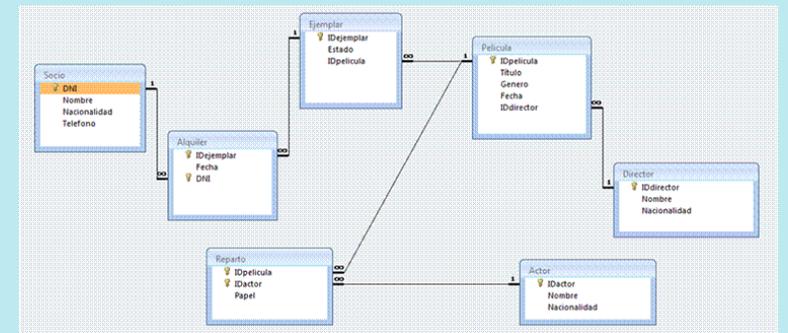
Diagramas de Hasse

Por medio de diagramas de Hasse se elimina información redundante de relaciones con ciertas propiedades, permitiendo de esta manera la optimización de recursos. Se puede establecer que una relación $R: A \rightarrow B$ es de orden parcial o parcialmente ordenada si es reflexiva, asimétrica y transitiva.



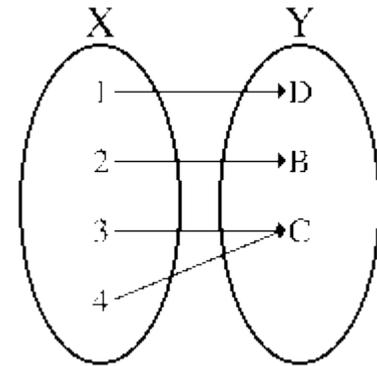
Las relaciones en las bases de datos

Un archivo en una base de datos también es una relación, y es posible llevar a cabo operaciones entre archivos aplicando las operaciones de relaciones.



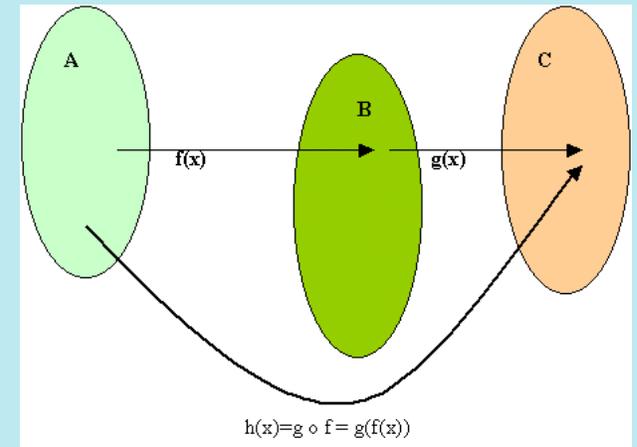
Funciones

Una función f es una relación que asigna a cada elemento x de un conjunto A un único elemento b de un conjunto B . Sean A y B conjuntos no vacíos.



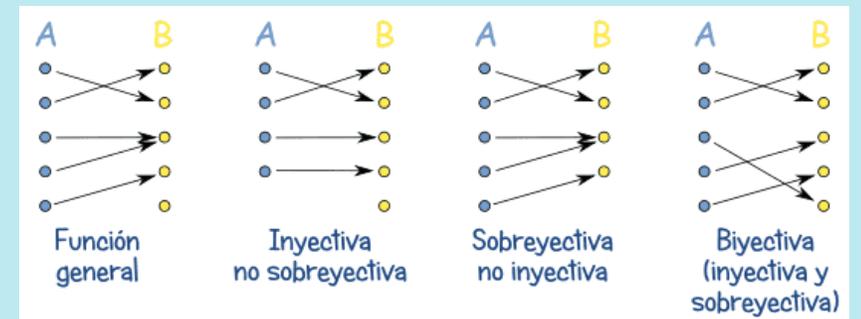
Composición de funciones

Si $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ son funciones, entonces la combinación $g \circ f$ llamada composición también es una función. La composición de funciones es de gran utilidad en el campo de la computación, ya que permite la aplicación de varias funciones en una misma línea de código, dando por resultado programas más compactos.



Tipos de funciones

Una función $f: A \rightarrow B$ se llama uno a uno si a cada elemento distinto del conjunto A le corresponde un elemento distinto del conjunto B . Una función $f: A \rightarrow B$ se llama sobre si el conjunto de los segundos elementos de los pares ordenados de la función es igual al conjunto B . Cuando una función es uno a uno y sobre, se dice que f tiene una correspondencia uno a uno.



Aplicación de las funciones

En cada uno de los lenguajes es posible crear funciones con características especiales que las funciones estándar no tienen, pero que se consideran necesarias ya sea porque se usan con mucha frecuencia, por que permiten dar claridad al código o porque hacen más compactos los programas.

